



Universidad de Navarra

Facultad de Ciencias

Caracterización del caos e hipercaos en sistemas magnéticos clásicos

Laura Milena Pérez Fuentes



Universidad de Navarra
Facultad de Ciencias

Caracterización del caos e hipercaos en sistemas magnéticos clásicos

Memoria presentada por **D^a. Laura Milena Pérez Fuentes** para aspirar al grado de Doctora por la Universidad de Navarra

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi dirección en el Programa de Doctorado en Sistemas Complejos y autorizo que sea presentado ante el Tribunal que lo ha de juzgar.

Pamplona, 29 de Enero de 2016

Dr. Héctor Luis Mancini Maza

Declaración:

Por la presente yo, **D^a. Laura Milena Pérez Fuentes**, declaro que esta tesis es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta tesis y, si procede, de la "fe de erratas" correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 29 de Enero de 2016


D^a. Laura Milena Pérez Fuentes

© Laura Milena Pérez Fuentes

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra

Agradecimientos

Primero que todo agradezco profundamente a mi tutor, Prof. Dr. Héctor Mancini, por su gran apoyo, por confiar en mi y por su enorme paciencia. Me ha enseñado no solo lecciones académicas, sino también de vida.

Agradezco a todos los Profesores, Funcionarios y Compañeros del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por el tiempo compartido, aunque haya sido poco en Pamplona, fue intenso y muy grato. El ambiente del Departamento es simplemente genial.

Agradezco también a: Prof. Dr. Javier Martínez-Mardones (PUCV, Chile), Prof. Dr. Pablo Díaz (UFRO, Chile), Prof. Dr. Omar Suarez (UdS, Colombia), Prof. Dra. Dora Altbir (USACH, Chile), Prof. Dr. Jason Gallas (UFP, Brasil), Prof. Dr. Jean Bragard (UNAV, España), Prof. Dr. Deterlino Urzagasti (UMSA, Bolivia), Dr. David Becerra-Alonso (ULA, España) y Ana Cabanas (UTA, Chile) por las excelentes colaboraciones que hemos tenido en diferentes problemas de investigación. Las discusiones científicas han sido un aporte en mi formación.

Además, quisiera agradecer al Prof. Dr. Harald Pleiner del Instituto Max Planck de Investigación en Polímeros (Mainz, Alemania) por todas sus enseñanzas y por haberme dado la oportunidad de trabajar en el MPI-P, donde parte de la investigación de la tesis fue realizada. También agradezco a su esposa Viktoria Pleiner por ser una amiga incondicional.

Finalmente, agradezco a mis queridos esposo e hijo, David Laroze y Nicolás Laroze, por su incondicional amor, entusiasmo y extraordinario apoyo, sin los cuales este Doctorado no habría sido posible.

Índice General

Prólogo	xi
1.- Introducción	1
1.1.- Breve historia del magnetismo	1
1.2.- Clasificación básica de los materiales magnéticos	7
2.- Dinámica de la Magnetización	11
2.1.- Estado del arte	11
2.2.- Ecuaciones de movimiento	16
2.2.1.- Conservación del módulo	17
2.3.- Ecuación Landau-Lifshitz conservativa	18
2.4.- Disipación de Gilbert: Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert	20
2.5.- Campo efectivo	23
2.6.- Ecuaciones de LL y LLG adimensionales	25
2.7.- Representaciones de la magnetización	27
2.8.- Soluciones de equilibrio	28
2.9.- Dinámica conservativa de una partícula en un campo homogéneo	29
2.10.- Consideraciones numéricas e Indicadores dinámicos	32
3.- Efecto de la anisotropía en la dinámica de una partícula en un campo magnético dependiente del tiempo	37
3.1.- Motivación del problema	37
3.2.- Modelo teórico	38
3.2.2.- Caso conservativo	41
3.3.- Simulaciones	43

3.4.- Comentarios finales	51
4.- Dinámica de un dímero magnético anisotrópico en presencia de un campo magnético homogéneo	53
4.1.- Motivación del problema	53
4.2.- Modelo teórico	55
4.3.- Simulaciones	57
4.3.1.- Caso conservativo	58
4.3.2.- Caso disipativo	63
4.4.- Comentarios finales	68
5.- Dinámica de un dipolo magnético en presencia de un campo externo dependiente del tiempo	69
5.1.- Motivación del problema	69
5.2.- Modelo teórico	71
5.3.- Caracterización de la dinámica	72
5.3.- Caracterización de la sincronización	78
5.4.- Comentarios finales	83
6.- Conclusiones y perspectivas	85
Bibliografía	89
Summary	99

Prólogo

Esta tesis tiene por objetivo el estudio de la dinámica de sistemas magnéticos fuera del equilibrio. Es decir, en sistemas donde existe una competencia entre la inyección y la disipación de energía. En particular, la tesis se enfoca en sistemas magnéticos clásicos donde cada elemento magnético puede ser descrito por dominio, tal que ellos no tengan inhomogeneidades espaciales. Se estudia tanto el caso de un elemento o partícula, como el de dos partículas interactuantes. Se considera el efecto de la forma y de la composición magnética de ellas mediante la energía de anisotropía. Se utilizan campos externos tanto homogéneos como dependientes del tiempo.

Los dos primeros capítulos de la tesis están enfocados a tratar los conceptos básicos del magnetismo como el marco teórico. Primeramente se hace una breve historia del magnetismo hasta nuestro día y los tipos de materiales magnéticos. Posteriormente se presentan las ecuaciones que gobiernan la dinámica de momentos magnéticos clásicos, y sus propiedades fundamentales. Se muestra en que casos hay constantes de movimiento. Además, se estudia el caso particular de una partícula en un campo magnético externo homogéneo.

El tercer capítulo trata sobre la dinámica de una partícula con varios ejes de anisotropía en presencia de un campo externo dependiente del tiempo. Se caracterizan las fases regulares como las caóticas con diagramas bidimensionales del exponente de Lyapunov. Refinando la resolución de los diagramas se encuentran islas periódicas dentro de regiones caóticas con forma de camarón.

En el cuarto y quinto capítulo se estudia la dinámica de dos partículas con anisotropía uniaxial acopladas. Primeramente, se analiza el caso de interacción de intercambio con campo magnético externo homogéneo. El segundo caso se centra en la interacción dipolar entre las partículas, tal que ellas están en presencia de un campo variable en el tiempo. En ambos casos se calculan diagramas de fases de los exponentes de Lyapunov para discriminar las fases regulares de

las caóticas (o hipercaóticas). En este último caso de estudio, se miden diferentes tipos de sincronización entre las partículas.

Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones y perspectivas.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se introducen los conceptos básicos del magnetismo, se describen algunas características de los materiales magnéticos, como también la nomenclatura que se usará a lo largo de esta tesis.

1.1 Breve Historia del Magnetismo

El magnetismo se centra en el amplio estudio sobre el espín y sus efectos colectivos, y sobre partículas cargadas en movimiento; consecuentemente está fundamentalmente relacionado con los fenómenos eléctricos [1]. En palabras simples el magnetismo clásico estudia las fuerzas de atracción o repulsión que un objeto ejerce sobre otro. Este es un campo muy activo y diverso de la física, donde todavía existen múltiples fenómenos que investigar. Si bien es cierto el magnetismo tiene un origen puramente cuántico, muchas de las propiedades pueden ser explicadas clásicamente o semiclásicamente [1]. Nos gustaría aclarar que en esta tesis solo se estudiarán sistemas que puedan ser descritos por la teoría clásica.

La historia del magnetismo es muy antigua, se remonta a la antigua Grecia y China. La leyenda versa que un pastor llamado Magnes cuando paseaba por la zona de Magnesia en Asia Menor se asombró de que los clavos de sus zapatos se adhirieran a la roca sobre la cual caminaba. Este tipo de roca se llamó después *magnetita*. Los primeros registros sobre descripciones de materiales magnéticos son alrededor del 600 A.C. sobre las propiedades magnéticas de piedras de ferrita férrica natural (Fe_3O_4) por filósofos chinos y griegos. Las brújulas chinas con piedra imán son elaboradas alrededor del 100 D.C., en cambio en occidente la primera referencia occidental a la

brújula es por Alexander Neckem en el año 1175 . El celebre libro "*De Magnete*" publicado en el año 1600 escrito por William Gilbert, quien era el medico personal de la Reina Elisabeth I y contemporáneo a Galileo, es la culminación de décadas de experimentos con imanes y electricidad, en el cual se demuestra que la Tierra es un imán, y que este era el motivo por el cual las brújulas apuntaban al norte [2]. En Inglaterra en el año 1745 Gowin Knight, descubre el proceso para producir acero magnetizado, con lo cual produce los primeros imanes artificiales, que con carácter comercial fueron vendidos a otros científicos y a navegantes.

El físico danés Hans Christian Oersted, demostró que una corriente eléctrica produce un campo magnético en el año 1820. Posteriormente, Michael Faraday propone la ley de inducción electromagnética en 1831, además propone el uso de *lineas de campo* para representar el campo magnético, concepto que se generalizó posteriormente a cualquier campo vectorial. Hasta aquel entonces el magnetismo y la electricidad eran tratados por separado, hasta que James C. Maxwell unifica las teorías electromagnéticas, dando una visión global del electromagnetismo clásico [3]. Haciendo un salto en la historia hasta después de los inicios de la creación de la teoría Cuántica, en el año 1925 fue introducido el concepto de *espín* como el **momento angular intrínseco** de una partícula cuántica, siendo este una nueva propiedad de la materia [4]. Normalmente el espín se denota por la letra **S**. Este nuevo concepto, reportado inicialmente por Ralph Kronig, George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit, vuelve a revolucionar la física ya que hasta aquel entonces solo se conocían las propiedades de masa y de carga. El hecho de tener un número cuántico adicional ayudo a entender profundamente como se comportan los constituyentes de la materia, tanto así que hoy sabemos que la materia se puede clasificar en dos grandes grupos *bosones*, que son partículas con espín entero; y *fermiones* que son partículas con espín semientero, tal que ellas cumplen con diferentes estadísticas, respectivamente [4]. El primer intento teórico por entender el efecto del espín en la dinámica de los electrones fue hecho por Wolfgang Pauli, creado una ecuación para el electrón que contuviese dicha información en la aproximación no-relativista; la cual hoy lleva su nombre. Además, enunció el principio sobre los fermiones, estableciendo que no

puede haber dos de estas partículas con todos sus números cuánticos idénticos ocupando el mismo estado cuántico simultáneamente. Basado en los trabajos de Pauli, uno de los físicos más prominentes del siglo XX, Paul A. M. Dirac desarrollo en 1928 una ecuación que describe correctamente al electrón, esta ecuación se conoce como *ecuación de Dirac*, y le da un énfasis relativista al espín [5].

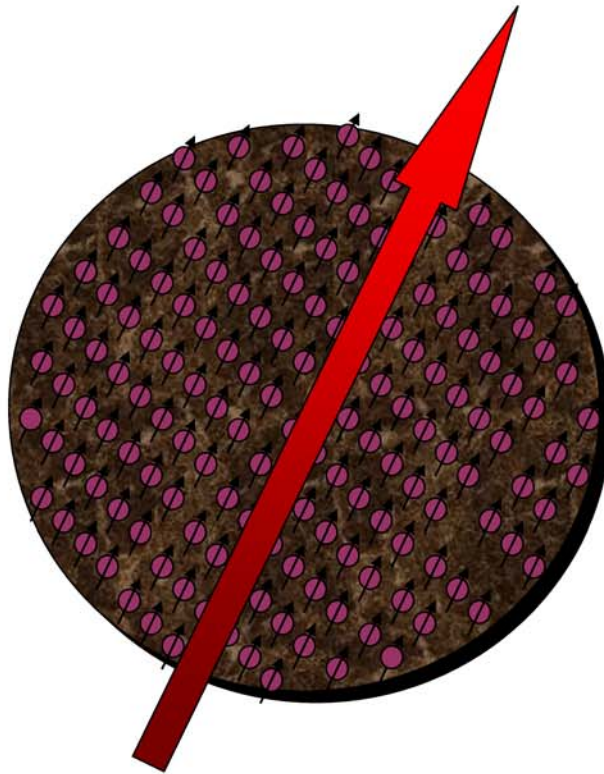


Figura 1.1: Esquema de un mono-dominio magnético.

Hasta el día de hoy se ha observado experimentalmente que el componente mínimo del magnetismo es el momento dipolar magnético, denotado generalmente por μ . Tal que dicho momento de un sistema (atómico) determinado se puede escribir en función del momento angular, \mathbf{J} , total mediante la ecuación [1]:

$$\boldsymbol{\mu} = -g(q_e/2m)\mathbf{J}, \quad (1.1)$$

donde $-q_e$ y m son la carga del electrón y la masa, respectivamente. El factor g es un factor

característico. Para electrones g se conoce como “factor de Lande”, mientras que para protones o neutrones como “factor nuclear”. Una de las grandes virtudes de la ecuación de Dirac es el hecho que se puede derivar el valor g , que explícitamente es $g = 2$. Este valor es muy cercano al valor medido, donde las diferencias vienen dadas por fluctuaciones cuánticas de los campos electromagnéticos [6]. Nos gustaría comentar someramente que se ha postulado la existencia de monopolos magnéticos, sin embargo no ha habido evidencia experimental reproducible que lo compruebe. En el caso clásico, un material magnético esta compuesto por múltiples átomos, donde se forman agrupaciones llamadas *dominios magnéticos* y el componente mínimo se conoce como **mono-dominio**. La relación entre la descripción microscópica y la macroscópica esta dada por $\mathbf{m} = \langle \mu \rangle / V$, donde \mathbf{m} se conoce como magnetización, V es el volumen de la región y el símbolo $\langle \bullet \rangle$ denota el promedio o valor esperado. La Figura 1.1 muestra un esquema de un mono-dominio magnético, donde se ejemplifica el hecho que el colectivo de átomos genera una magnetización efectiva en el material magnético.

Continuando con la historia, una vez que se entendió el concepto del espín, se empezó a estudiar como interactúan entre ellos. En el mismo año 1928, Werner Heisenberg y Paul A. M. Dirac, en forma independiente, desarrollaron la interacción de intercambio entre dos electrones desapareados cuando están relativamente próximos [7]. Esto se puede dar en el mismo átomo o ion, como entre dos átomos o iones. La interacción de intercambio es fundamental y describe buena parte de los procesos magnéticos, además de tener manifestaciones en la química. El modelo fenomenológico propuesto por ambos científicos, conocido como *modelo de Heisenberg*, para dos operadores de espín ($\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$) tiene un Hamiltoniano de la forma [1]:

$$\mathcal{H} = J_{12} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad (1.2)$$

donde J_{12} es la integral de intercambio. Después de este modelo, se han desarrollado múltiples generalizaciones de la ecuación (1.2) para entender diferentes fases magnéticas de los materiales.

También se ha tratado de forma clásica suponiendo que no son operadores de espín, sino momentos angulares clásicos [1,7]. En muchos casos el origen cuántico del magnetismo se pierde cuando se trata de explicar los efectos magnéticos de los sólidos de dimensiones espaciales mayores o del orden de los micrómetros [8].

Por otra parte, y desde un punto de vista tecnológico, en el siglo XX se siguió avanzando en la mejora de imanes. En 1930 se produce el primer imán de Alnico que es una aleación principalmente de cobalto, níquel, y aluminio (de allí el nombre Al-Ni-Co) [9]. Hasta la década de los 70 fueron los imanes permanentes más fuertes de uso comercial, ya que algunos poseen una intensidad de campo en los polos que es aproximadamente 3000 veces más fuerte que el campo magnético de la Tierra. Una de las aplicaciones tecnológicas del magnetismo que ha tenido un gran impacto en nuestra forma de ver el mundo, es la grabación magnética cuyos orígenes remontan a los trabajos de Oberlin Smith en 1878. Lo que uno puede recordar de la niñez es escuchar música en una radio-cassette o ver películas en citas de VHS. En este caso el almacenamiento de datos era mediante cintas magnéticas, que simplemente son una banda plástica con un material magnetizado. La historia de la grabación magnética es por si interesante, y se dejará al lector de esta tesis que lo investigue por si solo si lo desea [10].

En las ultimas décadas se ha desarrollado en forma explosiva la nano-ciencia, que es el estudio de objetos con escalas espaciales de nanometros (10^{-9} m), en al menos alguna dirección espacial. Una de las características fundamentales de las nano-estructuras es que la razón entre la superficie y el volumen es tremenda. En un mismo material, muchas de las propiedades físicas cambian a estas escalas respecto a las propiedades a nivel macroscópico [11-12]. Solo por nombrar dos aplicaciones en concreto veamos en breve, los *ferrofluidos* y las *moléculas magnéticas*. Estos fluidos son suspensiones de nanopartículas magnéticas en un liquido no conductor típicamente aceites o agua [13]. Los ferrofluidos normalmente no presentan fase magnética en ausencia de campo externo aplicado. Las aplicaciones son múltiples, desde usos militares hasta medicinales [13, 14]. A su vez, las moléculas magnéticas son sistemas en los que se puede obtener

magnetización permanente no a través de un ordenamiento magnético, sino por un fenómeno puramente molecular [15]. El primer caso se que estudió fue el Mn_{12} [$\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}(\text{CH}_3\text{COO})_{16}(\text{H}_2\text{O})_4$] se midió experimentalmente el efecto túnel en la desmagnetización [15, 16]. En estos últimos años se han sintetizado variados tipos de moléculas magnéticas con diferentes propiedades y aplicaciones [16].

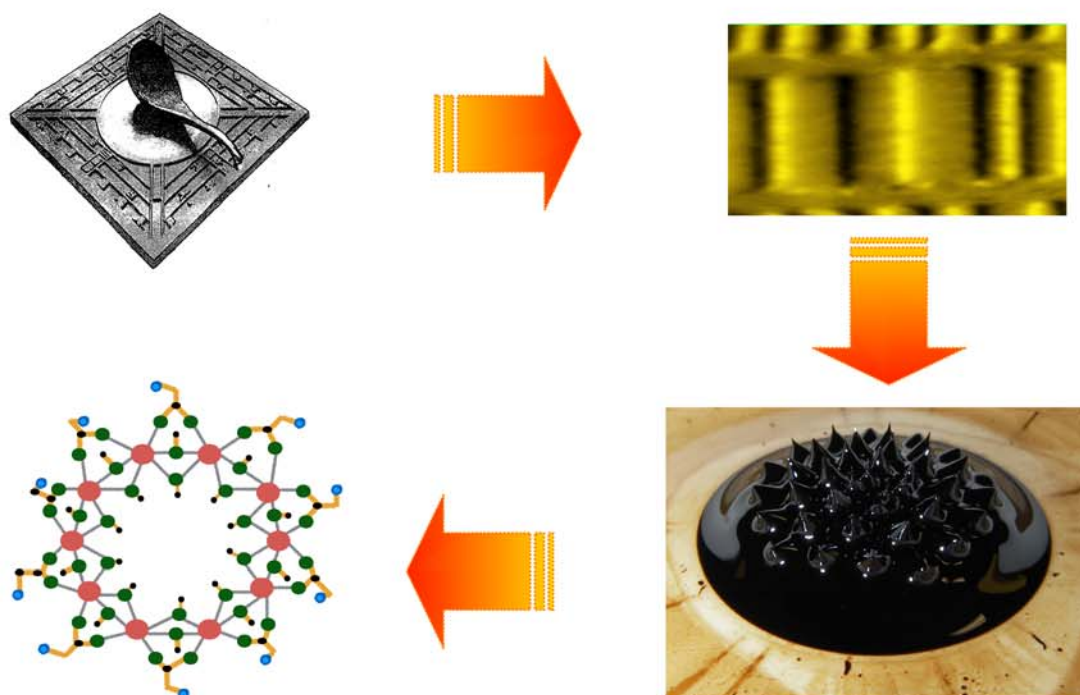


Figura 1.2: Esquema breve de la historia del magnetismo. Los recuadros superiores son una brújula china (izquierda) y una cinta de grabación magnética (derecha). Los recuadros inferiores son un ferrofluido (derecha) y una molécula magnética (izquierda).

La Figura 1.2 muestra esquemáticamente lo que hemos relatado sobre la historia. Hemos tomando en consideración cuatro ejemplos en secuencia temporal progresiva. Partimos con la brújula que ayudó a la exploración de los mares, seguimos la cinta de grabación magnética que nos cambió la forma de comunicarnos, seguimos con los ferrofluidos que están generando una revolución en múltiples campos aplicados como por ejemplo en medicina se usa trasladar dosis radioactivas a través del torrente sanguíneo. Por último, un esquema de una molécula magnética. Sobre este tipo

de moléculas todavía no conocemos sus verdaderos alcances y potenciales tecnológicos, y su estudio esta aún en la frontera del conocimiento. Finalmente, nos gustaría remarcar que versiones más acabadas de la historia del magnetismo se pueden encontrar en la referencias [\[1,4,8,9,16,17-20\]](#) en las cuales nos hemos basado en parte para escribir esta sección.

1.2 Clasificación básica de los materiales magnéticos

Los materiales magnéticos pueden ser clasificados según su respuesta ante campos magnéticos aplicados como diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos o antiferromagnéticos [\[1\]](#). Esta respuestas difieren fuertemente en su intensidad. El **diamagnetismo** se debe al movimiento de los electrones, y es la propiedad de todos los materiales de repeler al campo magnético. En su estado fundamental los materiales diamagnéticos no presentan momento magnético atómico, por lo cual no pueden presentar magnetización espontánea. Elementos diamagnéticos típicos son por ejemplo el Helio, o el Bismuto. El **paramagnetismo** se manifiesta solo cuando hay un campo externo aplicado, a pesar de que los elementos poseen momento magnético atómico. Cuando un campo magnético está presente, los materiales paramagnéticos exhiben una magnetización en la dirección del campo, siendo proporcional al campo externo. En general estos materiales no poseen un ordenamiento magnético, y sus momentos magnéticos están distribuidos en forma alzar en ausencia de campo aplicado. El efecto paramagnético es por lo general mucho más intenso que el diamagnético. Algunos materiales paramagnéticos son el Hidrógeno, el Sodio, el Rubidio, así como el Galio. Las primeras teorías tanto del diamagnetismo como del paramagnetismo se debe al físico francés Paul Langevin formulada a principio del 1900 [\[21\]](#). Su teoría concuerda bastante bien con los varios datos experimentales. Versiones mejoradas de estas teorías de carácter cuántico fueron hechas por Wolfgang Pauli y por Lev D. Landau, respectivamente [\[1,9,22\]](#).

El **ferromagnetismo** produce un ordenamiento en la configuración de los momentos magnéticos del material, tal que tiene a ordenarlos en la misma dirección y sentido. Estos materiales tienen momento magnético no nulo, y son capaces de presentar magnetización espontánea en ausencia de campos externos. Su efecto es relativamente fuerte, produciendo magnetizaciones algunas veces mayores en ordenes de magnitud que la del campo magnético aplicado. Los materiales ferromagnéticos por excelencia son Hierro, Cobalto y Níquel. Finalmente, en el **antiferromagnetismo** los momentos magnéticos interactúan de tal forma que produce patrones alternados en la dirección del momento magnético de cada momento en forma de pares tal que la magnetización global es nula. El elemento antiferromagnético básico es el Cromo o el Manganeseo. Las primeras teorías para entender los materiales ferro- y antiferro fueron desarrolladas por Pierre Weiss y por Louis Néel, respectivamente [23-24]. Luego siguieron los modelos de Heisenberg, Ising y los modelos de bandas hechos por Stoner. Una visión mas completa de ello se puede encontrar en las referencias [1,9,20,22].

TABLA PERIODICA DE LOS ELEMENTOS

	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8			1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	0
--	----	----	----	----	----	----	----	---	--	--	----	----	----	----	----	----	----	---

Paramagnético

Antiferromagnético

Diamagnético

Ferromagnético

1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	L	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	A															86 Rn
			L	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
			A	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Figura 1.3: Esquema de tabla periódica con características magnéticas.

Para dar una idea de como se distribuyen “magnéticamente” los elementos químicos, la Figura 1.3 muestra la tabla periódica de elementos con sus correspondientes propiedades magnéticas. Podemos apreciar que los elementos paramagnéticos son los más abundantes, seguidos por los diamagnéticos puros; y finalmente por los ferro- y antiferromagnéticos. Por supuesto que combinaciones de distintos elementos producen diferentes ordenes magnéticos, como por ejemplo los compuestos CrBr_3 , Cu_2MnAl , EuO y MnAs son materiales ferromagnéticos, mientras que los compuestos MnO , FeO , RbMnF_3 y KFeF_3 son antiferromagnéticos.

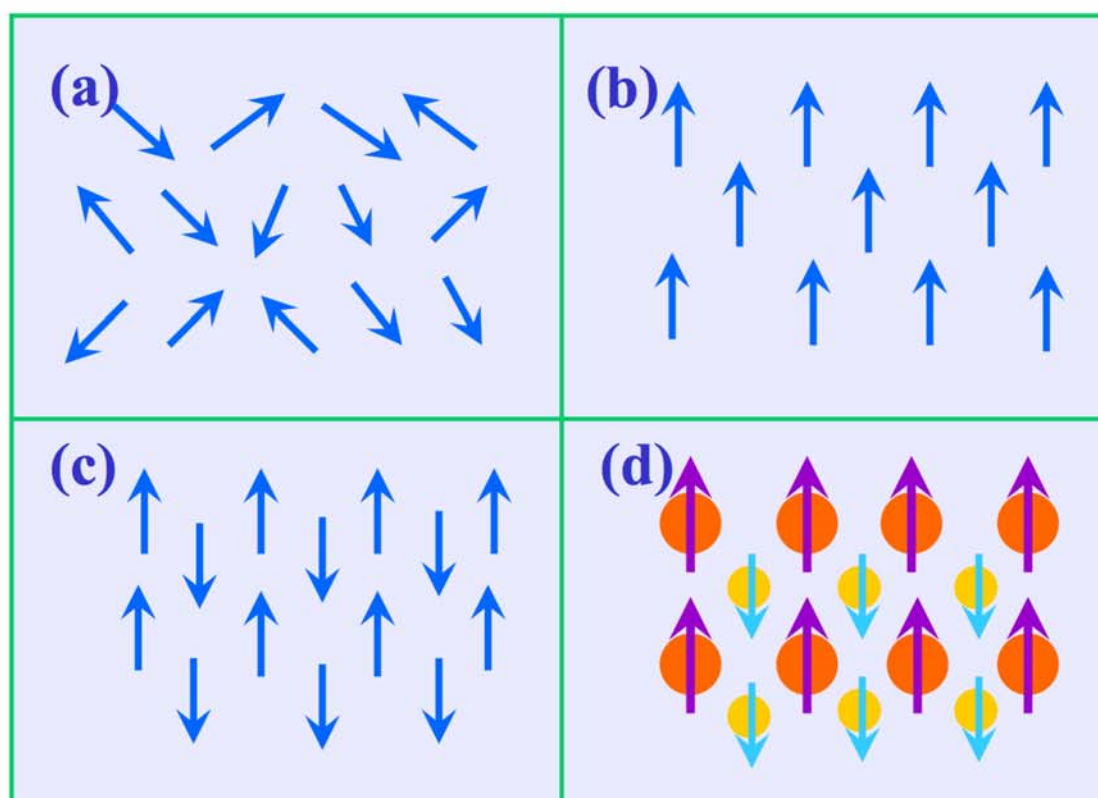


Figura 1.4: Esquema sobre diferentes ordenamientos magnéticos. Los recuadros son: (a) paramagnético, (b) ferromagnético, (c) antiferromagnético, y (d) ferrimagnético.

Por otra parte, hacemos notar que existen otros tipos de ordenes magnéticos. Como es el caso del **ferrimagnetismo**. Los materiales ferrimagnéticos consisten en al menos dos sub-redes magnéticas acopladas antiferromagnéticamente [1]. Este presenta magnetización espontánea en

ausencia de campo. Los valores de magnetización de un ferrimagneto por lo general son menores que los de un ferromagneto. Típicos materiales ferrimagnéticos son de la forma $(XO).Fe_2O_3$, donde X es un ion metálico divalente, como Mn, Ni, Fe, Co, o Mg; otro material que ha tomado un reciente interés es el GdFeCo. La Figura 1.4 es un esquema de los cuatro principales tipos de ordenes magnéticos. El recuadro (a) muestra el caso paramagnético, donde vemos que los momentos magnéticos están alzar. El recuadro (b) muestra el caso ferromagnético donde todos los momentos magnéticos están alineados en la misma dirección. El recuadro (c) muestra un ejemplo de materiales antiferromagnéticos donde se observa que los momentos están alienados con un patrón itinerante con magnitudes iguales. Por último, el recuadro (d) expone el caso del ferrimagnetismo donde también hay una alineación itinerante, pero la magnitud de los momentos de las diferentes especies difieren.

Finalmente, hacemos notar que debido a que los ferromagnetos pueden exhibir magnetización espontánea por largos periodos de tiempo, y los valores de saturación son relativamente mayores que los otros tipos de materiales, los convierte en materiales interesantes desde el punto de vista tecnológico. En lo que sigue de la tesis trabajaremos sobre estos materiales.

Capítulo 2

Dinámica de la Magnetización

En este capítulo se estudia la dinámica de sistemas magnéticos en general. Se presenta primeramente un estado del arte, luego se describe las ecuaciones de movimiento y se ven las principales características. Finalmente, se describe la dinámica de una partícula magnética en presencia de un campo externo homogéneo.

2.1 Estado del Arte

En ciencia de materiales una aplicación significativa de las partículas magnéticas es la grabación magnética. De hecho, existe un interés por almacenar datos en sistemas que consisten en colecciones de granos magnéticos sobre un sustrato no magnético [\[25-26\]](#). Como comentamos en el capítulo anterior a escala meso y macroscópica, donde los efectos cuánticos no son relevantes, el componente mínimo de un sistema magnético es el monodominio magnético. Actualmente, la tecnología puede producir arreglos de mono-dominios con diferentes características tanto del arreglo como del material a diferentes escalas de tamaño partiendo desde los nanómetros. Por lo cual es accesible el estudio tanto de un monodominio aislado, pocos dominios, o como también el estudio del arreglo completo.

Dependiendo de la geometría y de la composición, los dominios pueden tener direcciones privilegiadas donde magnetizarse, a estas direcciones se les llama ejes fáciles de magnetización. Si un monodominio posee un eje de fácil magnetización, a muy baja temperatura, la magnetización a campo externo nulo puede tener dos orientaciones posibles las que pueden representar los bits 0 ó 1, siendo base de memorias magnéticas. Hoy por hoy se han alcanzado densidades de almacenamiento de información del orden de 10^2 Gbit/in² o más [\[25\]](#).

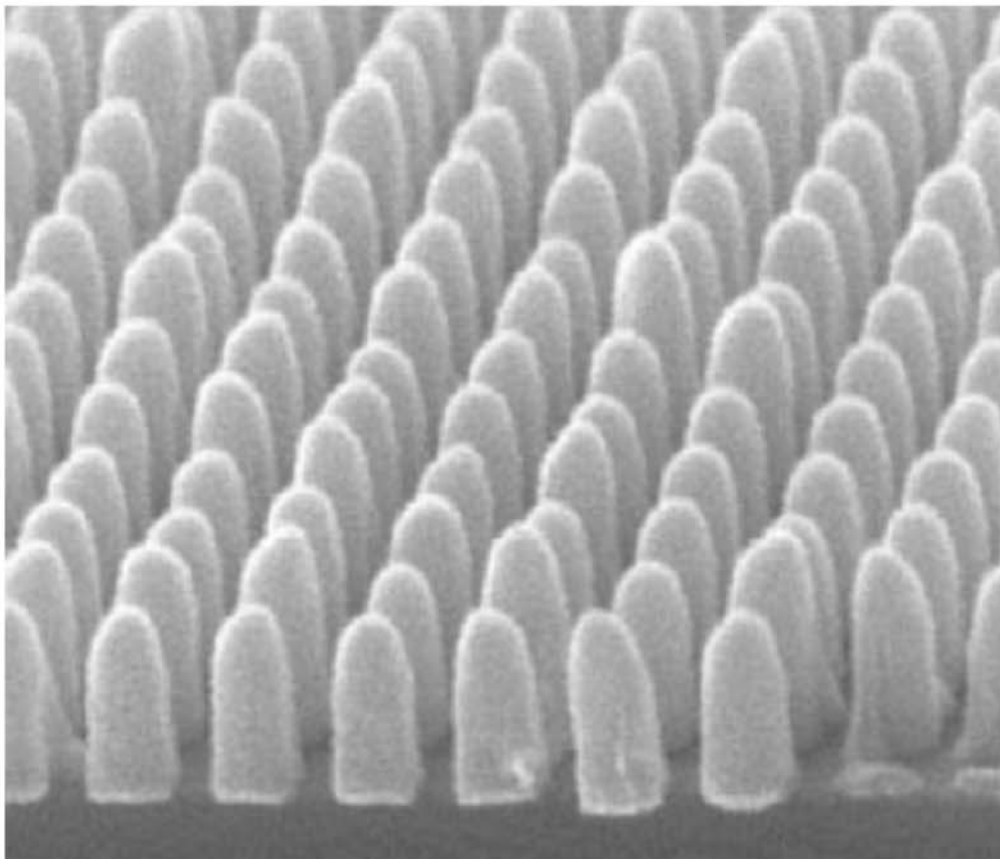


Figura 2.1: Conjunto de nano-cilindros ordenados. Cada partícula tiene magnetización uniforme por lo cual se puede considerar como un bit de informa información. La figura ha sido tomada de la referencia [25].

La Figura 2.1 muestra un arreglo de partículas magnéticas típicas el cual es un candidato prototipo para los nuevos sistemas de información. Cuando hay efectos externos aplicados, como un campo magnético, los momentos magnéticos muestran dinámicas interesantes.

Los procedimientos estándares para estudiar la dinámica de momentos magnéticos clásicos son a través de la ecuación de Landau–Lifshitz (LL) [27] o bien de la ecuación de Landau–Lifshitz–Gilbert (LLG) [28]. Por otra parte, dependiendo de la distancia entre partículas y/o de la geometría de los sistemas magnéticos, diferentes tipos de interacciones magnéticas se pueden manifestar. El efecto de ellas puede cambiar drásticamente el proceso de reversión magnética. De hecho, cualquier tipo de interacción entre partículas o bien efectos de auto-energía (como auto-interacción dipolar) genera términos no-lineales en la ecuaciones de movimiento.

Consecuentemente, la combinación de las interacciones, la disipación de energía y la inyección de energía mediante campos magnéticos externos, generan una dinámica compleja.

Problemas no-lineales en magnetismo han sido estudiados en muchos casos y el estado del arte se puede encontrar en las referencias [29-32]. Desde el punto de vista teórico, soluciones analíticas tanto para las ecuaciones de LL y LLG son dificultosas de obtener debido a la no-linealidad de estas ecuaciones; y solo en muy pocos casos se han podido obtener. Por ejemplo, un caso donde se conocen soluciones analíticas, tanto para el caso conservativo como disipativo, es el problema de una partícula con anisotropía uniaxial en presencia de un campo externo paralelo al eje de anisotropía [33]. Soluciones analíticas para una partícula anisotrópica con diferentes orientaciones del campo respecto a los ejes de anisotropía se pueden encontrar en las referencias [34-35]. Asimismo, un buen tratamiento sobre el aspecto no-lineal cualitativo de la dinámica disipativa de una partícula magnética con anisotropía uniaxial bajo un campo magnético circularmente polarizado fue reportado en la referencia [36], y como una continuación a dicho trabajo un estudio sobre las perturbaciones del momento magnético cuando el campo está polarizado elípticamente fue también realizado en la referencia [37]. En ambos casos se estudian las bifurcaciones asociadas a los ciclos límites, encontrando las regiones de inestabilidad de estos. En el caso de polarización circular, se puede hacer un cambio de variables llevando el sistema no-autónomo a uno autónomo con un campo efectivo. Un estudio sobre estados cuasi-periódicos usando teoría de perturbaciones en la ecuación de LLG fue reportado en la referencia [38].

Dinámicas complejas en magnetismo han sido un tópico de bastante interés tanto desde el punto de vista teórico como experimental [29]. Uno de los fenómenos más interesantes en sistemas complejos es el **caos** [39-44]. El comportamiento caótico en sistemas dinámicos no-lineales determinísticos es un comportamiento *aperiódico* a largos lapsos de tiempo; es decir las series temporales asociadas a cada componente del sistema son no regulares [40]. Hasta la fecha, solo se ha observado que el caos aparece en conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias tal que su dimensión efectiva sea mayor o igual que tres, lo que concuerda con la teoría del caos [41].

Una característica fundamental y universal de los sistemas caóticos es que ellos tienen una gran *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Esto implica que para un conjunto de parámetros donde el caos ocurre, si se deja evolucionar el sistema con dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas luego de un cierto tiempo las dos trayectorias dejan de estar cercanas y empiezan a tener evoluciones totalmente diferentes [42]. Mas aún, estos modelos poseen el hecho que sus *atractores son extraños*, lo que significa que las trayectorias en el espacio de fases no son ni suaves, ni son curvas cerradas; pero si en la mayoría compactas (ocupan una región del espacio de fases finita) [40]. Respecto a que el sistema sea determinista, se refiere a que ninguna fuerza aleatoria este presente. Cuando se combinan ambos efectos, es decir se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales estocásticas, por lo general el umbral del caos cambia o se suprime [43]. Diferentes técnicas se utilizan para la caracterización del caos, tales como transformadas de Fourier o/y de Wavelet, diagramas de bifurcaciones, secciones de Poincaré, diagramas de fases con atrasos, mapas de recurrencias, cálculos de diferentes correlaciones de las series temporales, computo de la dimensión fractal del atractor, como también el calculo *exponentes de Lyapunov* [40-45]. Este ultimo método se basa en el computo de la divergencia de dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas. Los algoritmos descritos para calcular los exponentes de Lyapunov en el trabajo de Wolf y colaboradores son los más usados [44]. Basados en estos algoritmos, se han hecho estudios paramétricos variando simultáneamente dos parámetros en orden de clasificar los diferentes regímenes de un sistema. Una descripción general sobre este tópico se puede encontrar en la referencia [45] .

Este fenómeno del caos, que es transversal a todas las ramas de la ciencia, fue descubierto por Edward Lorenz en 1963 estudiando problemas de fluidos, específicamente en la convección de una capa de fluido calentado desde la parte inferior [39]. Fue un trabajo pionero ya que abordó el problema desde un punto de vista teórico, y lo complementó con simulaciones numéricas. La clave del sistema de ecuaciones de Lorenz es reducir las ecuaciones en derivadas parciales de la hidrodinámica y de transferencia de calor a un conjunto de tres ecuaciones diferenciales

ordinarias. Las cuales dan cuenta desde la transición del estado conductivo, al convectivo estacionario; y posteriormente otra transición desde dicho estado a uno convectivo aperiódico. Además, de encontrar este sistema de ecuaciones, mediante simulaciones numéricas logro encontrar un orden dentro de la aperiodicidad, haciendo un mapa de recurrencia del máximo local de una de las componentes. El trabajo de Lorenz no tuvo impacto por casi por una década, sin embargo ha creado áreas de investigación, revolucionando la manera de entender el mundo.

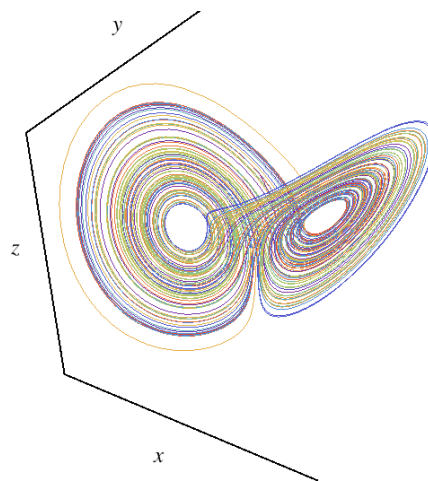


Figura 2.2: Trayectoria del sistema de Lorenz [39]: $\dot{x} = p(x - y)$, $\dot{y} = (r - z)x - y$, $\dot{z} = xy - bz$, con $r=29$, $p=7$ y $b=8/3$ y condiciones iniciales aleatorias.

Hacemos notar que el hecho de la existencia de la divergencia en las condiciones iniciales, se popularizó como el *efecto mariposa* y esto se debe en parte a que el atractor extraño encontrado en el sistema de Lorenz tenga forma de Mariposa como se muestra en la Figura 2.2. Dos fuentes bibliográficas sobre la fascinante historia del caos se pueden encontrar en las referencias [46-47].

Situándonos nuevamente en sistemas magnéticos, remarcamos que múltiples experimentos que muestran pautas caóticas han sido reportados [48-51]. Típicamente las muestras magnéticas son esferas de YIG (*Yttrium-Iron-Garnet*) [48]. Vale la pena mencionar que mediante el uso de la técnica de resonancia ferromagnética, diferentes rutas al caos se han encontrado tales como cascadas duplicación del período, rutas cuasiperiódicas, y de dinámica intermitente. Por lo tanto, se necesita una descripción teórica incluyendo diagramas de fase de las regiones caóticas y puede

motivar otros experimentos en esta área. Estudios teóricos sobre el caos de una partícula magnética anisotrópica en presencia de campos magnéticos dependiente del tiempo ha sido un abordado desde diferentes enfoques [52-57]. Recientemente, se ha hecho un estudio numérico exhaustivo sobre mapas bi-dimensionales de Exponentes de Lyapunov [55-56]. En el se encuentran islas de periodicidad dentro del caos. En este contexto hemos estudiado el **efecto de la anisotropía** sobre la dinámica caótica; en particular hemos encontrado que las islas periódicas tienen estructuras tipo *camarón* [58]. Los resultados serán presentados en próximo capítulo.

Finalmente nos gustaría comentar que la **interacción entre partículas magnéticas** da lugar a varios comportamientos complejos, más aun si hay campos externos presentes [59-61]. Esto ha sido también parte del trabajo de investigación que se presenta en esta tesis; profundizaremos sobre estos resultados en los capítulos cuatro y cinco, respectivamente.

2.2 Ecuaciones de Movimiento

Consideremos un sistema de N partículas magnéticas, asumiendo que cada partícula puede ser representada por un mono-dominio. consideremos además que ellas están colocadas fijas en algún arreglo magnético. Entonces, la evolución temporal del sistema es puramente rotacional , y puede ser modelada por la ecuación de Landau-Lifshitz; la cual para cada partícula se puede escribir de la forma [27, 30]:

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma|\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda^i |\gamma|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \mathbf{T}^i, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{M}^i = \mathbf{M}^i(t)$ representa el momento magnético de la partícula i , tal que $i=(1,...,N)$; y

donde γ es el factor giromagnético, cuyo valor numérico es aproximadamente

$|\gamma| = |\gamma_e| \mu_0 \approx 2.21 \times 10^5 \text{ m A}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Aquí, \mathbf{H}_{eff}^i denota el campo efectivo de la partícula i . Este campo

en general depende de todos los momentos magnéticos y de campos externos, es decir

$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{eff}^i(\mathbf{M}^1, \dots, \mathbf{M}^N, \mathbf{H}_{ext}(t))$. Ahondaremos más sobre él en una próxima subsección. El primer término de la derecha es un termino típicamente de precesión, mientras que el segundo término es un término fenomenológico que da cuenta de la disipación. Los coeficientes de disipación $\{\lambda^i\}$ son magnitudes adimensionales. Notemos que $\lambda^i \geq 0 \quad \forall i$, tal que el limite $\lambda^i \equiv 0$ el sistema se vuelve no-disipativo. La introducción de este término adicional fue elegido por consideraciones heurísticas [27]. Valores típicos del coeficiente de disipación son el orden de 10^{-4} a 10^{-3} en garnetes, 10^{-2} o mayores en Cobalto, Níquel, o en Permalloy [33]; y de orden de 10^{-4} en moléculas magnéticas [62]. Por ultimo, \mathbf{T}^i representa todos los otros torques sobre la partícula i que no se pueden escribir dentro del campo efectivo.

2.2.1 Conservación del modulo

Veamos una propiedad general de la ecuación (2.1). Si aplicamos producto escalar respecto de \mathbf{M}^i a ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$\mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i. \quad (2.2)$$

Entonces si $\mathbf{T}^i \perp \mathbf{M}^i$ (o bien directamente si $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$) el modulo de cada momento magnético es conservado, ya que

$$\mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{M}^i|^2 \right) = 0 \quad (2.3)$$

Esta es una propiedad dinámica bastante interesante, ya que en estos casos ($\mathbf{T}^i \perp \mathbf{M}^i$), el sistema de $3N$ ecuaciones tiene N restricciones, por lo cual puede ser descrito por un sistema $2N$ -dimensiones de variables equivalente. Además, el hecho de que el sistema sea $2N$ -dimensional hace que las ecuaciones de movimiento se puedan representar en otras coordenadas como por

ejemplo en coordenadas esféricas o bien en estereográfica. Por otra parte, debido a que las ecuaciones magnéticas son altamente no-lineales desde un punto de vista numérico tener esta propiedad es muy útil; ya que tener una constante de movimiento ayuda a verificar el método numérico a usar y sirve como un controlador de precisión.

Finalmente, hacemos notar que torques \mathbf{T}^i que no cumplan con esta propiedad necesariamente deben ser alguna función angular o bien directamente proporcional a la magnetización de cada partícula \mathbf{M}^i .

2.3 Ecuación Landau-Lifshitz Conservativa

Cuando $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$, $\lambda^i = 0$ y \mathbf{H}_{eff}^i no es una función explícita del tiempo, la ecuación (2.1) es conservativa. Bajo estas consideraciones el campo efectivo, \mathbf{H}_{eff}^i , puede ser derivado de una función de Hamilton:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = -\nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

donde \mathcal{H} es el Hamiltoniano del sistema, y el gradiente es respecto a las componentes de \mathbf{M}^i . En tal caso podemos escribir la ecuación (2.1) de la forma

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = |\gamma| \mathbf{M}^i \times \nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Notemos que, en esta ecuación el espacio de fase es conservado, esto se puede demostrar mediante

$$\nabla_{\mathbf{M}^i} \cdot \left(\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) = |\gamma| \nabla_{\mathbf{M}^i} \cdot (\mathbf{M}^i \times \nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}) = \mathbf{M}^i \cdot (\nabla_{\mathbf{M}^i} \times (\nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H})) = 0. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, con esta propiedad y el hecho que el modulo se conserva, podemos decir que el espacio de fase de este sistema conservativo son N esferas de radio $|\mathbf{M}|$.

Más aun, la ecuación (2.5) es simpléctica, y esta asociada a la dinámica de Nambu para N -tripletes de variables dinámicas y $2N+1$ constantes de movimientos (Hamiltoniano y los N módulos) [63-66]. Por lo cual, para la partícula i , de componentes $\mathbf{M}^i = (M_x^i, M_y^i, M_z^i)$, la ecuación (2.1) en la forma de Nambu puede ser escrita

$$\frac{dM_k^i}{dt} = \frac{\partial \left(M_k^i, \frac{1}{2} |\mathbf{M}^i|^2, \mathcal{H} \right)}{\partial (M_x^i, M_y^i, M_z^i)}, \quad (2.6)$$

donde $k = (x, y, z)$ y en el lado derecho de la ecuación (2.6) la función $\partial(\bullet, \bullet, \bullet) / \partial(\bullet, \bullet, \bullet)$ denota una derivada Jacobiana.

Por otra parte, como el sistema (2.5) puede ser descrito por un sistema de $2N$ ecuaciones para variables equivalentes ya que el modulo de cada momento magnético es independiente del tiempo, existe una transformación de variables que permite escribir el sistema con una estructura tipo Hamiltoniana. Esta transformación es $\mathbf{M}^i = (f(M_z^i) \cos \phi^i, f(M_z^i) \sin \phi^i, M_z^i)$ tal que

$$f(M_z^i) = \sqrt{1 - (M_z^i)^2}. \text{ Entonces definiendo el vector } 2N \text{ dimensional, } \mathbf{w} = (M_z^1, \dots, M_z^N; \phi^1, \dots, \phi^N),$$

como el vector de variables canónicas y momentos canónicos conjugados; la ecuación de movimiento para \mathbf{w} se lee

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{I}} \\ \tilde{\mathbf{I}} & 0 \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H}, \quad (2.7)$$

donde $\tilde{\mathbf{I}}$ es la matriz identidad de $N \times N$; y el Hamiltoniano, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{w})$, es ahora una función de \mathbf{w} . La ecuación (2.7) representa la ecuación de movimiento de Hamilton para \mathbf{w} . Esta representación de la ecuación (2.5) es una forma equivalente para la dinámica de espines clásicos conservativa. La idea de buscar cambios de variables que describan las ecuaciones de movimiento

de una forma conocida es útil desde el punto de vista formal, y en principio permiten conocer la propiedades generales del sistema. Como podemos ver por las ecuaciones (2.6) y (2.7) existe una conexión intrínseca entre dinámica de Nambu y dinámica de Hamilton. Esto es posible de demostrar en forma genérica [67].

Como observación general, la dinámica de Nambu, ha abierto una nueva rama de investigación tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica. El trabajo de Nambu fue el primero en el cual se pensó en trabajar con números impares de variables canónicas [63]. Un problema interesante del punto de vista abstracto, fue generalizar el álgebra asociada a los corchetes de Poisson, y su posible cuantización [68]. Un buen artículo sobre los fundamentos de esta dinámica en forma mas abstracta se puede encontrar en la referencia [69].

2.4 Disipación de Gilbert: Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert

Debido a que la descripción de la disipación es fenomenológica (y muy dependiente del tipo de material), se han propuesto múltiples maneras de agregarla aparte de la Landau-Lifshitz. El más conocido de estos fue hecho por Gilbert a mediados del siglo pasado [28, 70]. La ecuación del Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) esta dada por:

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} + \mathbf{T}^i, \quad (2.8)$$

donde (γ_G, λ_G^i) son las constantes de Gilbert. La ecuación de LLG, esta inspirada para una disipación proveniente de una función de disipación tipo Rayleigh [28]. Este término extra posee una derivada con respecto al tiempo en la magnetización, por lo cual hace que el operador diferencial sea mas complicado que lo normal. Para poder describirlo de forma simple se puede aplicar diferentes representaciones.

En ausencia del termino de torque extra, $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$, la ecuación de LL es equivalente a la ecuación de LLG con diferentes escalas temporales y diferentes parámetros. Para mostrar ello, multipliquemos con un producto vectorial a ambos lados de la ecuación (3.2) con \mathbf{M}^i . Con lo cual se tiene

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \left(\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right), \quad (2.9)$$

dado que

$$\mathbf{M}^i \times \mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \mathbf{M}^i \left(\mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) - |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \quad (2.10)$$

se tiene que

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) - \lambda_G^i |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt}, \quad (2.11)$$

donde hemos usado el hecho que el modulo se conserva. Ahora insertando (2.11) en (2.8) tenemos finalmente que

$$\kappa^i \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i), \quad (2.12)$$

donde $\kappa^i = 1 + (\lambda_G^i)^2 |\mathbf{M}^i|$ es una constante positiva definida. Si identificamos $\gamma_G = \gamma$, $\lambda_G^i = \lambda^i$ obtenemos la ecuación (2.1) salvo por un cambio de escala temporal, dado para cada partícula por $1/\kappa^i$. O bien podemos redefinir nuevos parámetros de la forma $\gamma \rightarrow \gamma^i \doteq \gamma_G / \kappa^i$ y $\lambda^i |\gamma| \doteq \lambda_G^i |\gamma_G| / \kappa^i$ con lo cual obtenemos una ecuación de LL equivalente para cada partícula. La diferencia es que en LL solo se tiene una constante γ igual para todas las partículas y ahora queda una constante diferente γ^i para cada partícula. Si son partículas idénticas (misma constante de disipación y modulo) tendrán un parámetro γ único. Notemos que el cambio de escala temporal

es difícil de detectar experimentalmente. Esto es fácil de verificar para una partícula, ya que como en este caso el modulo es una constante, luego puede ser tomado a la unidad ($|\mathbf{M}| = 1$) entonces usando que $\lambda \sim 10^{-4} - 10^{-2}$ se tiene que $\kappa^{-1} \approx 0.999999$.

Por el contrario, si se agrega un torque extra, $\mathbf{T}_i \neq \mathbf{0}$, tenemos que estas ecuaciones no son equivalentes, y por lo tanto dan diferentes dinámicas. Veamos como queda la ecuación (2.8) al tomar el producto vectorial en el caso general:

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \left(\mathbf{M}^i (\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i) - |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) + \mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i. \quad (2.13)$$

Luego insertando (2.13) en (2.8) se tiene que LLG en forma explícita es:

$$\begin{aligned} \left(1 + (\lambda_G^i)^2 |\mathbf{M}^i|\right) \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = & -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \mathbf{T}^i \\ & + \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i + |\gamma_G| \left(\frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \right)^2 (\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i) \mathbf{M}^i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notemos que la ecuación general de LLG (2.14) tiene dos términos extras respecto de la ecuación de LL. Los cuales son de naturaleza totalmente diferente, uno depende del productor vectorial $(\mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i)$ y el otro del producto escalar $(\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i)$. Luego, independiente de las propiedades de simetría de un sistema particular no se pueden anular ambos si $\mathbf{T}^i \neq \mathbf{0}$.

Dado que desde mecánica cuántica es posible obtener desde primeros principios la ecuación conservativa (2.5), se ha debatido bastante sobre cual de los dos modelos es el correcto; ya que el problema se presenta cuando existen torques que no son posibles de escribir como un campo efectivo. Con aproximaciones semiclásicas, se ha logrado obtener términos disipativos [71-76]. De hecho, se ha derivado de forma explícita la ecuación (2.1) [71]. Otras discusiones acerca de cual de las dos es consistente con la termodinámica (irreversible) se han planteado en

los últimos años [71, 77-78], dando más favorable el enfoque de Landau-Lifshitz. Recientemente, tanto desde el punto de vista experimental como teórico se ha encontrado que la disipación no-local [79] en nano-materiales con diámetros de 100 nm aproximadamente [80]. Queremos remarcar finalmente que este tópico sigue abierto a la discusión científica, y se ira aclarando a medida que se hagan más experimentos con efectos donde las descripciones no sean equivalentes salvo un cambio de escala temporal.

2.5 Campo Efectivo

El campo efectivo de un sistema magnético en general es derivado de un funcional que toma en cuenta los campos externos como a su vez de las interacciones entre las partículas. Este funcional lo denotaremos por \mathcal{H} . Consecuentemente, el campo externo se puede introducir a través de la *interacción de Zeeman*, mientras que las interacciones típicas entre partículas pueden ser la de *intercambio* o la *dipolar* [1,7,9,20,81-85]. Normalmente existen tres tipos predominantes de interacciones intercambio para mono-dominios magnéticos, el modelo de Heisenberg, el modelo Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY) [81-83], el modelo de Dzyloshinsky-Moriya [84-85]. Estos tres modelos son cuánticos, sin embargo se usan para modelar a nivel macroscópico. El modelo de Heisenberg es el más usado y por lo general se usa para interacciones los primeros y segundos vecinos; mientras que el modelo RKKY la constante de intercambio deja de ser local y varia espacialmente de vecino en vecino. La energía de Dzyloshinsky-Moriya (DM) es asimétrica y prefiere ciertos vecinos y orientaciones. El caso de la energía dipolar es macroscópica, y es una interacción de largo alcance que mezcla todos los vecinos [1]. Además, para modelar la geometría de las partículas y sus correspondientes propiedades de la composición magnética del material, se incluyen auto-interacciones fenomenológicas, conocidas como *energía de anisotropía* [1]. Estas son funciones no-lineales de la magnetización que a orden más bajo (y más comunes) son formas cuadráticas, sin embargo ciertos materiales poseen anisotropías de mayor orden [9,20].

Dependiendo del sistema a tratar se decide que interacción y auto-interacción son mas importantes. Por lo tanto, un funcional genérico puede ser escrito de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{H}_{ext} + \underline{\mathbf{M}}^i \cdot \vec{\mathbf{A}}_{(i)} \cdot \mathbf{M}^i \right) + \sum_{i \neq j}^{N,N} \left(J_{ij} \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{M}^j + \mathbf{D}_{ij} (\mathbf{M}^i \times \mathbf{M}^j) + \underline{\mathbf{M}}^i \cdot \vec{\mathbf{B}}_{ij} \cdot \mathbf{M}^j \right) \\ & + \sum_{i \neq j}^{N,N} \left(\frac{\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{M}^j}{d_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{M}^i \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij})(\mathbf{M}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij})}{d_{ij}^5} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde \mathbf{H}_{ext} es el campo externo, $\vec{\mathbf{A}}_{(i)}$ denota la matriz de anisotropía de la partícula i . Aquí la notación $\underline{\mathbf{V}}$ denota el vector traspuesto de \mathbf{V} . Las constantes J_{ij} son conocidas como las constantes de intercambio entre la partícula i y la partícula j . Esta podría depender de la distancia entre partículas d_{ij} , es decir, $J_{ij} = J_{ij}(d_{ij})$, cuando pasa esto se conoce como interacción RKKY [81-83]. El vector \mathbf{D}_{ij} es el vector de DM, el cual tiene reglas asocias bien determinadas [84-85]. La matriz $\vec{\mathbf{B}}_{ij}$ denota la matriz de la interacción de intercambio antisimétrica. El último término es la interacción dipolar de la ecuación (2.17), donde $\hat{\mathbf{n}}_{ij}$ denota un vector unitario en la dirección relativa de la partícula i respecto de la partícula j . Por último, hacemos notar que el campo externo puede ser una función explícita del tiempo y puede variar de amplitud en cada punto, es decir $\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{H}_{ext}(\{i\}, t)$.

En esta tesis no tomaremos en cuenta el efecto de DM, así como tampoco de anisotropías de intercambio. Además, asumiremos que las anisotropías están representadas por tres ejes principales [9], por lo cual la energía de anisotropía se reduce a:

$$\mathcal{H}_{an} = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \sum_{i=1}^N K_{i,a} (\hat{\mathbf{q}}_a^i \cdot \mathbf{M}^i)^2, \quad (2.16)$$

donde $\{K_{i,a}\}$ son las constantes de anisotropía y $\{\hat{\mathbf{q}}_a^i\}$ son los vectores unitarios en la dirección de los ejes de anisotropía. Hacemos notar que existe un caso particular bastante común, que es cuando solo uno de los ejes es importante, este se conoce como el caso *uniaxial* [20]. Otro caso importante es el caso *bi-axial* donde dos ejes de anisotropía son importantes [1,9].

El campo efectivo se puede obtener usando la misma relación funcional (2.4), en nuestro caso este se reduce a:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{ext} + \sum_{a=1}^3 K_{i,a} (\hat{\mathbf{q}}_a^i \cdot \mathbf{M}^i) \hat{\mathbf{q}}_a^i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N J_{ij} \mathbf{M}^j + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left(\frac{\mathbf{M}^j}{d_{ij}^3} + \frac{3(\mathbf{M}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij}) \hat{\mathbf{n}}_{ij}}{d_{ij}^5} \right) \quad (2.17)$$

En casos conservativos y cuando el campo externo es independiente del tiempo, el funcional (2.17) puede ser entendido claramente como la *energía magnética* del sistema. De hecho, en tal caso sería constante de movimiento.

2.6 Ecuaciones de LL y LLG adimensionales

Para poder hacer un análisis independiente del material magnético específico, se puede hacer uso variables adimensionales. En tal caso, la magnetización adimensional se puede escribir de la forma $\mathbf{m}^i = \mathbf{M}^i / |\mathbf{M}^i|$. Primero asumamos que tenemos un sistema de partículas idénticas y que $\mathbf{T}_i = \mathbf{0}$. Por lo tanto, se tiene que para todas las partículas su modulo es $|\mathbf{M}^i| = M_s$. En tal caso el tiempo adimensional este puede ser expresado de la forma $\tau = t|\gamma|M_s$ [31], donde γ en el caso de LLG debe ser remplazado por γ_G . Lo cual produce que el campo efectivo se normalice a $\mathbf{h}_{eff}^i = \mathbf{H}_{eff}^i / M_s$. Además, esta normalización conduce a que cada momento magnético este

contenido en una esfera unidad $|\mathbf{m}^i| = 1$. Usando estas expresiones tenemos que la ecuación LL queda de la forma

$$\frac{d\mathbf{m}^i}{d\tau} = -\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i - \lambda \mathbf{m}^i \times (\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i), \quad (2.18)$$

donde se ha asumido que al tener partículas idénticas los coeficientes de disipación son los mismos $\lambda^i \equiv \lambda$. En el caso de la ecuación LLG se tiene que ecuación (2.12) se reduce a:

$$\kappa \frac{d\mathbf{m}^i}{d\tau} = -\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i - \lambda_G \mathbf{m}^i \times (\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i), \quad (2.19)$$

aquí de hecho se puede usar una nueva variable para tiempo de la forma $T = \tau / \kappa$ en tal forma podemos ver que las ecuaciones (2.18) y (2.19) tienen formalmente la misma estructura, esto implica que la diferencia entre ambas ecuaciones son las escalas de tiempo. En el caso general de partículas no idénticas y $\mathbf{T}_i \neq \mathbf{0}$, en el caso de LLG tendrá que

$$\kappa^i \frac{d\mathbf{m}^i}{d\tau} = -\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i - \lambda^i \mathbf{m}^i \times (\mathbf{m}^i \times \mathbf{h}_{eff}^i) + \mathbf{G}^i, \quad (2.20)$$

donde los coeficientes $\{\kappa^i\}$ están relacionados con las posibles escalas temporales, y \mathbf{G}^i representa todos los términos extras normalizados.

Finalmente, para obtener una mejor comprensión física de los fenómenos, vamos a evaluar las escalas introducidas aquí. Los valores experimentales típicos de M_s son, por ejemplo, para materiales de cobalto, $M_{s[Co]} \approx 1.42 \times 10^6 \text{ A/m}$ para los materiales de níquel $M_{s[Ni]} \approx 4.8 \times 10^5 \text{ A/m}$ [31], o para cristales de Mn_{12} $M_{s[Mn_{12}]} \approx 4.77 \times 10^4 \text{ A/m}$ [86]. Destacando las frecuencias giromagnéticas en el rango de los gigahercios $|\gamma| M_{s[Co]} \approx 308 \text{ GHz}$, $|\gamma| M_{s[Ni]} \approx 106 \text{ GHz}$ y $|\gamma| M_{s[Mn_{12}]} \approx 10.5 \text{ GHz}$, respectivamente. Por lo tanto, la escala de tiempo ($\tau = 1$) está en el rango de los picosegundos, $t_{s[Co]} = 1 / (|\gamma| M_{s[Co]}) \approx 3.2 \text{ ps}$, $t_{s[Ni]} = 1 / (|\gamma| M_{s[Ni]}) \approx 9.4 \text{ ps}$, y

$t_{s[Mn_{12}]} = 1 / (|\gamma| M_{s[Mn_{12}]}) \approx 95.2 \text{ ps}$, respectivamente. La tecnología de hoy en día es capaz de medir los procesos en picosegundo y femtosegundos. De hecho, Beaurepaire y colaboradores [87] fueron los primeros en observar la dinámica de espín en una escala de tiempo por debajo de la escala de picosegundos en níquel. Recientemente, se han observado fenómenos en una escala de tiempo menor que 100 fs [88, 89].

2.7 Representaciones de la magnetización

Hemos demostrado previamente que cuando $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$ el modulo de cada momento magnético es conservado. Por lo cual, cada vector de magnetización puede ser representado por dos variables efectivas. Hay dos representaciones usuales, la esférica [31] y la esferográfica [32]. En la esferográfica la magnetización es transformada a una variable compleja. Esta representación es útil cuando se quiere estudiar pequeñas oscilaciones [31]. En este apartado mostraremos como quedan las ecuaciones en la representación esférica. Para ello hagamos la siguiente transformación:

$$\mathbf{m}^i = (\cos \phi^i \sin \theta^i, \sin \phi^i \sin \theta^i, \cos \theta^i)^T, \quad (2.21)$$

donde $\phi^i = \phi^i(t)$ y $\theta^i = \theta^i(t)$ son ángulos. Además, supongamos que el campo efectivo puede ser derivado de un funcional de la forma (2.4). En tal caso, insertando (2.21) en (2.8) después de un poco de algebra se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\theta^i}{dt} + \lambda^i \sin \theta^i \frac{d\phi^i}{dt} = -\frac{1}{\sin \theta^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^i}, \quad (2.22a)$$

$$-\lambda^i \frac{d\theta^i}{dt} + \sin \theta^i \frac{d\phi^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta^i}, \quad (2.22b)$$

donde ahora $\mathcal{H}(\mathbf{m}^i, t) = \mathcal{H}(\theta^i, \phi^i, t)$. Esta representación tiene explícita la conservación de la norma de cada momento magnético, pero tiene un inconveniente ya que presenta singularidad en los polos de la esfera. Además, cuando la disipación es nula, $\lambda^i = 0$, las ecuaciones (2.22) se reducen a las ecuaciones de Hamilton para las variables $(\cos\theta^i, \phi^i)$ mostradas en la Sección 2.3.

2.8 Soluciones de Equilibrio

Las soluciones más simples a las ecuaciones de movimiento son las de equilibrio, estas vienen dadas por la condición $d\mathbf{M}^i/dt = 0$. Dicha condición en las ecuaciones de LLG (2.8) da como consecuencia un sistema algebraico de ecuaciones de la forma:

$$-|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i + \mathbf{T}^i = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

En el caso que $\mathbf{T}^i \equiv \mathbf{0}$ para todo i , esta se simplifica a

$$\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

la cual es también válida para las ecuaciones de LL, debido a la equivalencia entre ambas formulaciones. Notemos que en este caso para dar un cierre al sistema se usa la conservación del módulo de cada momento magnético $|\mathbf{M}^i| = M_s^i$. Hacemos notar que estas soluciones serán estables o inestables dependiendo de los parámetros del sistema en estudio.

Veamos el caso de una partícula, la estabilidad se puede estudiar de la forma estándar, es decir suponiendo que la magnetización viene dada por $\mathbf{M} = \mathbf{M}_h + \delta\mathbf{M}$, donde \mathbf{M}_h son las soluciones homogéneas y $\delta\mathbf{M}$ son pequeñas perturbaciones en torno a ellas, tal que $|\delta\mathbf{M}| \ll 1$. Este enfoque produce un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para $\delta\mathbf{M}$ que puede ser escrito como

$$\frac{d\delta\mathbf{M}}{dt} = \tilde{\mathbf{L}} \cdot \delta\mathbf{M}, \quad (2.25)$$

tal que la matriz $\tilde{\mathbf{L}}$ contiene toda la información sobre \mathbf{M}_h . Expandiendo en modos normales $\delta\mathbf{M} = \mathbf{Q}_0 \exp(\lambda t)$ el problema se transforma a un problema de valores propios $\tilde{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}_0 = \lambda \mathbf{Q}_0$. Luego, si todos los valores propios de $\tilde{\mathbf{L}}$ tienen *parte real negativa*, la soluciones son *asintóticamente estables*; en cualquier otro caso serán linealmente inestables [90]. Finalmente, hacemos notar que cuando $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$, lo más óptimo para estudiar la estabilidad de las soluciones es usar las variables esféricas con la linealización de las ecuaciones (2.22a) y (2.22b) ya que en este caso ellas por defecto conservan la norma.

2.9 Dinámica conservativa de una partícula en un campo homogéneo

Para dar un ejemplo de la dinámica de la magnetización estudiemos la evolución temporal de una partícula magnética anisotrópica de magnetización \mathbf{M} en presencia de un campo externo aplicado homogéneo, \mathbf{H}_{ext} . La anisotropía se asume uniaxial donde su eje esta represando por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$. En particular analizaremos el caso cuando no hay efectos externos, $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, y la disipación es cero $\lambda = 0$; es decir estamos en la situación conservativa. Bajo estas consideraciones el campo efectivo normalizado se puede escribir de la forma [9]:

$$\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{h}_{ext} + \beta(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \quad (2.26)$$

donde β es la constante de anisotropía, cuyos valores típicos pueden ser positivos o negativos dependiendo del material [1,20]. La evolución temporal en variables adimensionales viene dada por la ecuación (2.18) y en este caso se reduce a

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{ext} + \beta(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (2.27)$$

Escogiendo la dirección del campo perpendicular al eje de anisotropía de tal forma que $\mathbf{h}_{ext} = h_x \hat{\mathbf{x}}$ y que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Consecuentemente la ecuación (2.21) por componentes queda

$$\frac{dm_x}{d\tau} = -\beta m_y m_z \quad (2.28a)$$

$$\frac{dm_y}{d\tau} = (\beta m_x - h_x) m_z, \quad (2.28b)$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = h_x m_y. \quad (2.28c)$$

Este es un sistema de ecuaciones que tiene dos componentes no lineales debido a la anisotropía.

Este sistema de ecuaciones tiene dos conjuntos de soluciones estacionarias $\mathbf{m}_{0,a(\pm)} = \pm \hat{\mathbf{x}}$ y

$\mathbf{m}_{0,b} = p \hat{\mathbf{x}} \pm \sqrt{1-p^2} \hat{\mathbf{z}}$, donde $p = h_x/\beta$. La segunda solución converge a la rama positiva de

$\mathbf{m}_{0,a(+)}$ cuando $h_x/\beta \rightarrow 1$, y la rama negativa cuando $h_x/\beta \rightarrow -1$. Por otra parte, notemos que el

sistema tiene dos constantes de movimiento la energía magnética y la conservación del módulo,

luego el sistema es integrable, es decir podemos encontrar soluciones analíticas para $\mathbf{m}(\tau)$

usando una única variable. Estudiemos soluciones en torno a $\mathbf{m}_{0,b}$, para ello hagamos la siguiente

transformación:

$$\mathbf{m}(\tau) = \left(p - X \cos(u(\tau)), -Y \sin(u(\tau)), \pm \sqrt{1 - (p - X \cos(u(\tau)))^2 - (Y \sin(u(\tau)))^2} \right). \quad (2.29)$$

Insertando esta transformación en la ecuación (2.28) se obtiene que:

$$\frac{du}{d\tau} = \pm \delta \sqrt{1 - (p - X \cos u)^2 - (Y \sin u)^2}, \quad (2.30)$$

donde $\delta = \beta Y/X$. Notemos que esta ecuación diferencial se puede integrar fácilmente ya que la

ecuación (2.30) se puede escribir de la forma

$$\tau = \pm \frac{1}{\delta} \int_{u_0}^u \frac{dz}{\sqrt{1 - (p - X \cos z)^2 - (Y \sin z)^2}}. \quad (2.31)$$

Resolvamos la integral indefinida de la ecuación (2.31). Para ello hagamos el cambio de variables

$q = \cos z$, luego la integral del queda

$$I = \int \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2)(a+bq+cq^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2)(A+q)(B+q)}}, \quad (2.32)$$

donde $a = 1 - p^2 - Y^2$, $b = 2pX$ y $c = Y^2 - X^2$. Cuando $c > 0$, esta integral se puede expresar en

términos de funciones elípticas de primer orden $F(\alpha|\chi)$. Explícitamente se tiene que

$$I = \frac{2}{\sqrt{c(A+1)(1-B)}} F\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{(A+1)(B+q)}{(B+1)(A+q)}}\right) \middle| \frac{(A-1)(B+1)}{(A+1)(B-1)}\right), \quad (2.33)$$

con esta integral se tiene una solución implícita para $u(\tau)$. En general, diferentes configuraciones

tanto de campo como de auto-energía de interacción darán funciones elípticas de Jacobi. Un

estudio más acabado se puede encontrar en la referencia [31].

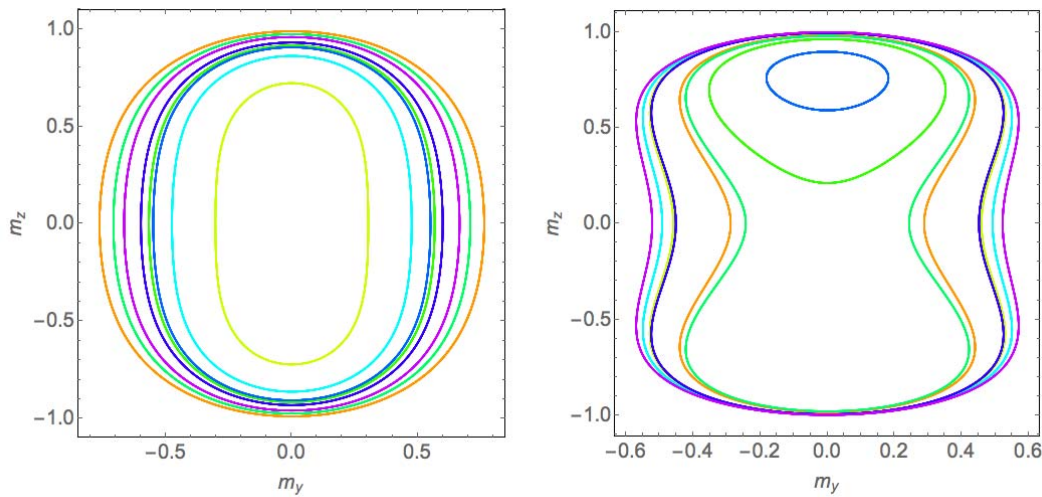


Figura 2.3: Gráfico paramétrico $m_y - m_z$ con varias condiciones iniciales para dos valores distintos de los parámetros:

(izquierda) $h_x/\beta = 1$ y (derecha) $h_x/\beta = 5/8$.

La Figura 2.3 muestra la dinámica en el plano para dos valores diferentes de la constante de anisotropía. Como claramente se puede observar las soluciones son oscilatorias y dependen fuertemente de los valores de los parámetros.

2.10 Consideraciones numéricas e Indicadores dinámicos

En este último apartado del capítulo presentamos las consideraciones numéricas que usáramos en los próximos capítulos de la tesis. Debido a que en general la ecuación (2.1) es no lineal en muy pocos casos particulares se pueden obtener soluciones analíticas. Por lo tanto, se debe resolver numéricamente. Desde el punto de vista numérico, es mejor usar ecuaciones adimensionales, por lo cual en todos los casos a estudiar en los próximos capítulos usaremos la versión adimensional de la ecuación LL, dada por la ecuación (2.18). La integración de estas ecuaciones se realizarán utilizando métodos estándar de integración de Runge-Kutta [41]. Para verificar que el método funciona se calcula la constante de movimiento, $|\mathbf{m}'|=1$, de forma dinámica. Esta constante de movimiento es muy útil, ya que es un buen indicador que el método numérico escogido funciona.

Primeramente, la caracterización de los comportamientos dinámicos se hace mediante la evaluación de los exponentes de Lyapunov (LEs). Este método consiste en cuantificar la divergencia entre dos trayectorias cercanas del campo vectorial [44,45]. En general, para un sistema dinámico de dimensión efectiva N descritas por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma,

$dX_k/d\tau = F_k(\mathbf{X}, \tau)$, el k -ésimo exponente de Lyapunov viene dado por:

$$\Lambda_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{\|\delta X_k(\tau)\|}{\|\delta X_k(\tau_0)\|} \right) \right), \quad (2.34)$$

donde $\|\delta X_k(\xi)\|$ es la distancia entre las trayectorias de la k-ésima componente del campo vectorial en el tiempo ξ ; tal que $\delta \mathbf{X}$ satisface la ecuación:

$$\frac{d\delta \mathbf{X}}{d\tau} = \tilde{\mathbf{J}} \cdot \delta \mathbf{X}, \quad (2.35)$$

donde $\tilde{\mathbf{J}}$ es la matriz Jacobiana de \mathbf{F} respecto de \mathbf{X} , es decir $[\tilde{\mathbf{J}}]_{ab} = \partial F_a / \partial X_b$. Luego para computar los exponentes de Lyapunov hay que resolver un sistema acoplado de $(N+1)N$ variables. Recordemos que el sistema dinámico tiene tantos LEs como dimensiones del espacio de fase [40]. Éstos pueden ser ordenados en forma descendente $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$. El primer exponente es el mayor exponente de Lyapunov (MEL), que normalmente se denota por $\Lambda_1 = \Lambda_{\max}$. Cuando tratamos con el régimen no disipativo, se cumple que para este tipo de sistemas los LEs vienen en pares $(\Lambda_i, \Lambda_{N-i+1})$ de tal manera que su suma es igual a cero [40,41]:

$$\sum_i \Lambda_i = 0, \quad (2.36)$$

y al menos dos LEs son iguales a cero. En el caso de sistemas disipativos, la suma total no tiene porque ser cero [41]. Explorando la dependencia del MEL con los diferentes parámetros del sistema, uno puede identificar áreas en el espacio de parámetros donde la dinámica es caótica (MEL positivo), o bien donde se presenta dinámicas no-caóticas regulares (MEL cero o negativo). Los exponentes de Lyapunov son calculados con los algoritmos expuestos en la referencia [44].

Para tener un entendimiento de los diferentes regímenes del modelo prototipo se explora la dependencia de MEL con diferentes parámetros de control del sistema. Uno puede, por ejemplo, dibujar mapas bidimensionales que ilustran la magnitud del MEL como una función de dos parámetros. Esto permite determinar los intervalos de parámetros que conducen a la dinámica caótica, es decir, MEL positivo, y aquellos que muestran dinámicas regulares (soluciones estacionarias, periódicas o cuasiperiódicas), MEL negativo o cero.

Si el sistema dinámico es de alta dimensionalidad, se puede dar el caso de tener mas de un de un exponente de Lyapunov positivo para un parámetro fijo, se dice que el sistema exhibe un régimen hipercaótico [91-96]. Luego, para caracterizar el hipercaos basta medir si el MEL y el segundo mayor LE (SMEL) son ambos positivos, es decir $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 > 0$.

Además, siguiendo una técnica explicada en la Ref. [45], se utiliza un proceso de resolución de zoom iterativo para investigar más a fondo la dependencia de la dinámica respecto a variaciones muy pequeñas de los parámetros del sistema. Esta técnica se utiliza generalmente para el estudio de sistemas dinámicos que contienen fases caóticas complicadas y topología de frontera interesantes, por ejemplo, las curvas donde las redes de islas estables de oscilaciones periódicas con cada vez mayor periodicidad se acumulan de forma sistemática [45].

Aparte de este método, existen otros indicadores de cómo medir los diferentes estados dinámicos de un sistema, tal como el espectro de Fourier, secciones de Poincaré, funciones de correlación, mapas de recurrencia, o diagramas de bifurcación, entre otros [29,31,32,52-57]. El más clásico es cálculo de la transformada rápida de Fourier (FFT) denotada por $S(f)$. La FFT nos da una función compleja de la señal en el espacio de frecuencias $f = (f_1, \dots, f_p)$, produciendo un conjunto de pares $\{f_k, S(f_k)\}$. Con esta señal uno puede calcular su espectro de potencia, $|S(f)|^2$, y contar el números de picos, N_p , correspondientes a cada frecuencia. Este número es una medida de los modos de oscilación del sistema. Consecuentemente, cuando el sistema exhibe un comportamiento periódico aparecen un numero finito de picos; mientras que para regímenes caóticos, en el espectro Fourier típicamente se observa una gran cantidad de cúspides, los cuales forman como un “continuo” de puntos [29,42]. El cálculo de la transformada rápida de Fourier es computado después de un tiempo transitorio suficientemente largo para obtener el estado permanente del sistema, y tomando en consideración lo expuesto en las referencias [97-98].

Otro método usual para identificar los diferentes regímenes es mediante diagramas de bifurcación. Existen múltiples métodos de computo de ellos, los dos más comunes son: (a) contar

cuantos puntos cruzan por alguna sección de Poincaré [52], (b) contar el numero de máximos de las series de tiempo [54]. Hacemos notar que ambos métodos son equivalentes, ya que entregan en esencia la misma información. Con estos criterios de conteo se tiene que si el sistema está en un estado estacionario un único punto será apreciado, en cambio si se está en un estado de multi-periodicidad habrá tantos puntos como modos de oscilación. En el caso de un régimen cuasiperiódico o en el caso caótico se tendrá una gran cantidad de puntos formado casi un “*continuo*”. Normalmente, el caso cuasiperiódico a pesar de ser múltiples puntos en el diagrama se ve más compacto que en un caso caótico.

Finalmente, hacemos notar que para dinámicas complejas lo que se puede hacer para tener una buena caracterización numérica es utilizar más de un indicador. Actualmente, el método más utilizado en la literatura esta basado en exponentes de Lyapunov [44-45].

Capítulo 3

Efecto de la anisotropía en la dinámica de un partícula en un campo magnético dependiente del tiempo

En el presente capítulo se estudia la dinámica de una partícula magnética anisotrópica en presencia de un campo magnético externo usando la ecuación disipativa Landau-Lifshitz-Gilbert. Se asume que el campo magnético es dependiente del tiempo y que pueden existir varios ejes de anisotropía. Esencialmente los resultados que mostraremos en este capítulo han sido publicados en la referencia [58].

3.1 Motivación del problema

Como hemos comentado en el capítulo 2 el estudio del caos en sistemas magnéticos ha sido estudiado en diferentes tipos de configuraciones y materiales [29,48-57]. El caso mas común es tener una partícula con anisotropía uniaxial [48]. En este caso se requiere que el campo magnético externo sea dependiente del tiempo para tener comportamientos caóticos. De hecho, para este sistema, cómputos del MEL han sido realizados para diferentes valores del campo magnético [52], asimismo la ruta al caos mediante doblamiento de periodo fue determinada en la referencia [54]. Recientemente, mapas bi-dimensionales de exponentes de Lyapunov en función de diferentes parámetros han sido reportados [55-57]. Con ello se consiguió determinar las regiones en el espacio de parámetros donde el sistema exhibe caos o estados regulares. Sin

embargo, el efecto de la anisotropía no fue considerado anteriormente, el cual juega un rol importante, y será lo que presentaremos en este capítulo.

Por otra parte, nos gustaría remarcar que calcular este tipo de diagramas de exponentes de Lyapunov son generalmente costosos computacionalmente, pero revelan una gran cantidad de información. De hecho, para tener entendimiento sobre los estados dinámicos, se ha aplicado un método de zoom iterativo que permite mejorar la resolución en el espacio de parámetros [45]. Este método ayuda a definir de forma precisa las fronteras entre los diferentes estados. Además, permite encontrar patrones dentro del espacio de parámetros. Un ejemplo de estos patrones son islas periódicas con forma de camarón [99]. Estas estructuras se presentan en una gran variedad de sistemas físicos [99-104], y son conocidas por ser el link entre la clase universal de dinámica observada en caos homoclínico de Shilnikov [105]. La organización global de estas estructuras complejas es todavía limitadamente entendida, y las partículas magnéticas pueden ofrecer un sistema alternativo para futuras investigaciones.

3.2 Modelo teórico

Para modelar una partícula magnética, supondremos que puede ser representada por un monodominio magnético de magnetización \mathbf{M} . Supondremos que la partícula es anisotrópica de segundo orden, tal que la energía de anisotropía puede ser descrita por sus tres ejes principales [9]. En tal caso el campo magnético efectivo adimensional, \mathbf{h}_{eff} , se puede escribir de la forma

$$\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{h}_{ext} + \sum_{a=1}^3 \alpha_a (\hat{\mathbf{q}}_a \cdot \mathbf{m}) \hat{\mathbf{q}}_a, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{h}_{ext} es el campo magnético externo, $\{\alpha_a, \hat{\mathbf{q}}_a\}$ representan los coeficientes de anisotropía efectiva y los vectores unitarios en la dirección de ejes principales, respectivamente; y donde la

magnetización esta normalizada de la forma usual $\mathbf{m} = \mathbf{M} / M_s$ tal que M_s representa la magnetización de saturación de la partícula. En lo que sigue denotaremos las constantes de anisotropía los ejes principales con notación Cartesiana, es decir $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ y $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. El campo magnético externo tendrá una componente homogénea y otra dependiente del tiempo, tal que puede ser descrito por:

$$\mathbf{h}_{ext} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_T \sin(\Omega \tau), \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{h}_0(\parallel \hat{z})$ y $\mathbf{h}_T(\perp \hat{z})$ y Ω son constantes. Recordemos que con este escalamiento dimensional el tiempo t esta normalizado $\tau = |\gamma| M_s t$. Además, el campo y la frecuencia adimensionales son $\mathbf{h}_{0(T)} = \mathbf{H}_{0(T)} / M_s$ y $\Omega = \omega / (|\gamma| M_s)$. Como la amplitud del campo y las frecuencias están medidos en unidades de M_s y de $|\gamma| M_s$, respectivamente. Entonces, uno puede encontrar valores típicos para cobalto o níquel son del orden de magnitud $10^4 - 10^5 \text{ A/m}$ y 10^2 GHz , respectivamente; los cuales actualmente se pueden encontrar experimentalmente [106-108]. Por lo cual, desde el punto de vista teórico se puede hacer un barrido en el espacio de parámetros libremente.

Por otra parte, el segundo término de la ecuación (3.1) representa el campo de anisotropía. La energía de anisotropía manifiesta el hecho experimental que las propiedades magnéticas dependen de la dirección en la que se miden [9]. Esta energía tiene contribuciones de diferentes naturalezas, como cristal, magneto-estáticas, o anisotropía de forma. De hecho, los coeficientes α_a están relacionados con valores físicos a través de $\alpha_j = 2K_j / \mu_0 M_s^2 - N_j$ donde K_j son las constantes de anisotropía físicas y N_j son los factores de desmagnetización que tienen que ver con la forma de la partícula [109-112]. Remarcamos que α_a pueden ser positivas o negativas dependiendo de la sustancia específica y de la forma de la muestra en uso [9,18,20,22,113]. Por

otra parte, además del caso de anisotropía uniaxial (estudiado en el capítulo anterior) existe un caso bastante interesante que es cuando el sistema tiene dos ejes preferenciales, como por ejemplo $\alpha_x \neq 0, \alpha_y \neq 0$, y $\alpha_z = 0$. Este caso se conoce como anisotropía bi-axial.

La evolución temporal del sistema puede ser modelada por la ecuación de Landau-Lifshitz adimensional. Hacemos notar que debido a la presencia de un campo dependiente del tiempo, el sistema dinámico es no-autónomo, por lo cual es mejor escribir este sistema como autónomo agregando una nueva variable al sistema, $\xi = \Omega\tau$, que actuará en la función trigonométrica de (3.2). En tal caso, la ecuación (2.19) en coordenadas Cartesianas se reduce a:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{dm_x}{d\tau} = & -h_z m_y + (\alpha_y - \alpha_z) m_y m_z + h_y m_z \sin \xi - \lambda (h_y m_x m_y - h_x (m_y^2 + m_z^2)) \sin \xi \\ & - \lambda m_x ((\alpha_y - \alpha_x) m_y^2 + (h_z + (\alpha_z - \alpha_x) m_z) m_z), \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \kappa \frac{dm_y}{d\tau} = & h_z m_x - h_x m_z \sin \xi - (\alpha_x - \alpha_z) m_x m_z + \lambda h_y (m_x^2 + m_z^2) \sin \xi \\ & - \lambda m_y (h_x m_x \sin \xi + (\alpha_x - \alpha_y) m_x^2 + m_z (h_z + (\alpha_z - \alpha_y) m_z)), \end{aligned} \quad (3.3b)$$

$$\begin{aligned} \kappa \frac{dm_z}{d\tau} = & (\alpha_x - \alpha_y) m_x m_y + (h_x m_y - h_y m_x) \sin \xi + \lambda (h_z + m_z \alpha_z) (m_x^2 + m_y^2) \\ & - \lambda m_z (\alpha_x m_x^2 + \alpha_y m_y^2 + (h_x m_x + h_y m_y) \sin \xi), \end{aligned} \quad (3.3c)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \Omega, \quad (3.3d)$$

donde $\kappa = 1 + \lambda^2$. Recordamos que en esta ecuación normalizada su constante de movimiento está normalizada a la unidad $|\mathbf{m}| = 1$. El sistema dinámico (3.3) es de dimensión cuatro, pero tiene una constante de movimiento, por lo cual la dimensión efectiva es tres. Esta dimensión extra esta

dada por la inclusión del campo externo dependiente del tiempo. Claramente cuando $\Omega \rightarrow 0$ la ecuación (3.3d) tiene una solución constante, y el sistema convierte en uno de dimensión efectiva dos; y en dimensión dos, no hay lugar a caos [90]. Luego, la riqueza del problema es ver como el campo externo oscilante y los coeficientes de anisotropía generan dinámicas complejas.

3.2.1 Caso Conservativo

Antes de analizar el sistema (3.3) numéricamente podemos estudiar cuales son las soluciones analíticas del conservativo. Así, cuando $\lambda = h_x = h_y = 0$ el conjunto anterior de ecuaciones queda:

$$\frac{dm_x}{d\tau} = -h_z m_y + (\alpha_y - \alpha_z) m_y m_z, \quad (3.4a)$$

$$\frac{dm_y}{d\tau} = h_z m_x - (\alpha_x - \alpha_z) m_x m_z, \quad (3.4b)$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = (\alpha_x - \alpha_y) m_x m_y. \quad (3.4c)$$

Como se conserva el módulo y la energía, el sistema (3.4) se puede integrar analíticamente. Las soluciones más simples son las soluciones homogéneas, que son $\mathbf{m} = \pm \hat{\mathbf{z}}$. Además, cuando $\alpha_x = \alpha_y = 0$ y $\alpha_z \neq 0$, se puede obtener una solución en términos de funciones trigonométricas

[57]:

$$\mathbf{m}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{z0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{x0} \\ m_{y0} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\Phi_0 \tau) + \begin{pmatrix} -m_{y0} \\ m_{x0} \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\Phi_0 \tau), \quad (3.5)$$

donde $\Phi_0 = h_z + \alpha_z m_{0z}$ es la frecuencia natural de precesión, y las condiciones iniciales han de ser elegidas para verificar $m_{x0}^2 + m_{y0}^2 + m_{z0}^2 = 1$. En el caso general, empleando las dos constantes de movimiento podemos reducir una de las componentes en términos de las otras dos:

$$m_z = \frac{1}{2h_z} \left((\alpha_z - \alpha_x) m_x^2 + (\alpha_z - \alpha_y) m_y^2 - (2\mathcal{G} + \alpha_z) \right), \quad (3.6)$$

donde \mathcal{G} es la energía del sistema. Además, las componentes (m_x, m_y) pueden ser descritas por un única variable u utilizando el ansatz $(m_x, m_y) = (X \cos u, Y \sin u)$. Insertando el ansatz en la ecuación (3.4b), se obtiene

$$\frac{du}{d\tau} = A + B m_z(u), \quad (3.7)$$

donde $A = X h_z / Y$ y $B = X(\alpha_z - \alpha_x) / Y$. Por lo tanto, utilizando la relación (3.6), la ecuación de u se reduce a

$$\frac{du}{d\tau} = a + b \sin^2 u + c \cos^2 u, \quad (3.8)$$

tal que los coeficientes son $a = X(h_z - (\alpha_z - \alpha_x)(2\mathcal{G} + \alpha_z) / (2h_z)) / Y$, $b = (\alpha_z - \alpha_x)^2 X^3 / (2Y h_z)$ y $c = (\alpha_z - \alpha_x)(\alpha_z - \alpha_y) X Y / (2h_z)$. La solución analítica de esta ecuación diferencial se puede expresar de la forma

$$u(\tau) = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a+c}} \tan \left(\tau \sqrt{(a+b)(a+c)} + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a+c}{a+b}} \tan(u_0) \right) \right) \right). \quad (3.9)$$

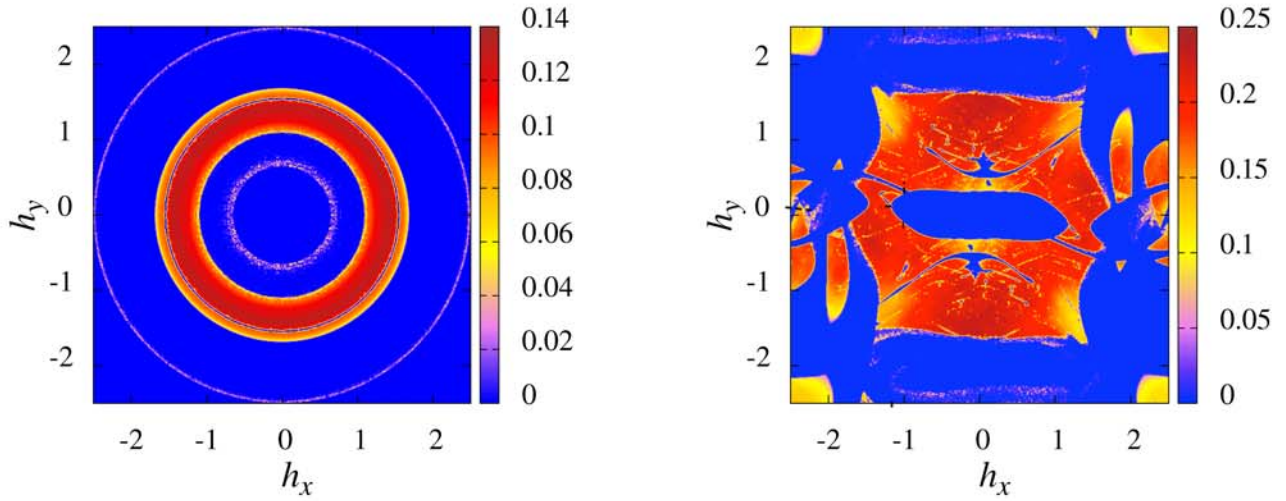


Figura 3.1: Diagrama de fase del MEL en código de colores como función de las amplitudes h_x y h_y para $\alpha_x = \alpha_y = 1.0$ (izquierda) y $\alpha_x = -\alpha_y = 1.0$ (derecha). Los parámetros fijos son: $\Omega = 1.0$, $h_z = 0.1$, $\alpha_z = 0$ y $\lambda = 0.05$. Las resoluciones son $\Delta h_x = \Delta h_y = 0.01$.

Esta solución es bastante interesante ya que esta expresada en términos de funciones elementales. Notemos que las constantes se calculan con las condiciones iniciales y estas deben ser escogidas tal que cumplan con la condición de conservación del módulo. Adicionalmente, remarcamos que existen otro tipo de soluciones representadas por funciones elípticas, las cuales pueden ser encontradas sustituyendo $m_z(u) = \sqrt{1 - (m_x^2(u) + m_y^2(u))}$ en la ecuación (3.7).

En lo que sigue del capítulo veremos como la competencia entre la disipación y la inyección de energía, generan estados dinámicos regulares complejos o estados caóticos.

3.3 Simulaciones

En esta sección presentamos resultados numéricos del sistema (3.3). Como se ha descrito en la Sección 2.10 el método numérico empleado es Runge-Kutta de orden cuatro con un paso de

tiempo fijo de $d\tau = 0.01$, que garantiza una precisión de 10^{-7} en la magnetización. Para el computo de exponentes de Lyapunov usamos el algoritmo presentado en la referencia [45]. En particular, estos son computados para un período de tiempo de $\tau = 32768$ después de un transitorio de tiempo inicial de $\tau = 1024$. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se lleva a cabo después de cada $\delta\tau = 1$. El error E_{rr} en la evaluación de los ELs ha sido comprobado por el uso de $E_{rr} = \sigma(\Lambda_1) / \max(\Lambda_1)$, donde $\sigma(\Lambda_1)$ es la desviación estándar del MEL positivo, lo cual es suficientemente pequeño para el propósito del presente análisis.

En particular, nos concentramos en la discusión de la influencia de las amplitudes del campo magnético y de las constantes de anisotropía. La elección de los parámetros asegura valores realistas y evita posibles artefactos debido al sistema específico y, por tanto, aporta una descripción general. Debido al gran número de parámetros de control involucrados en el sistema, fijamos $\Omega = 1$ y $\lambda = 0.05$ para el resto del capítulo.

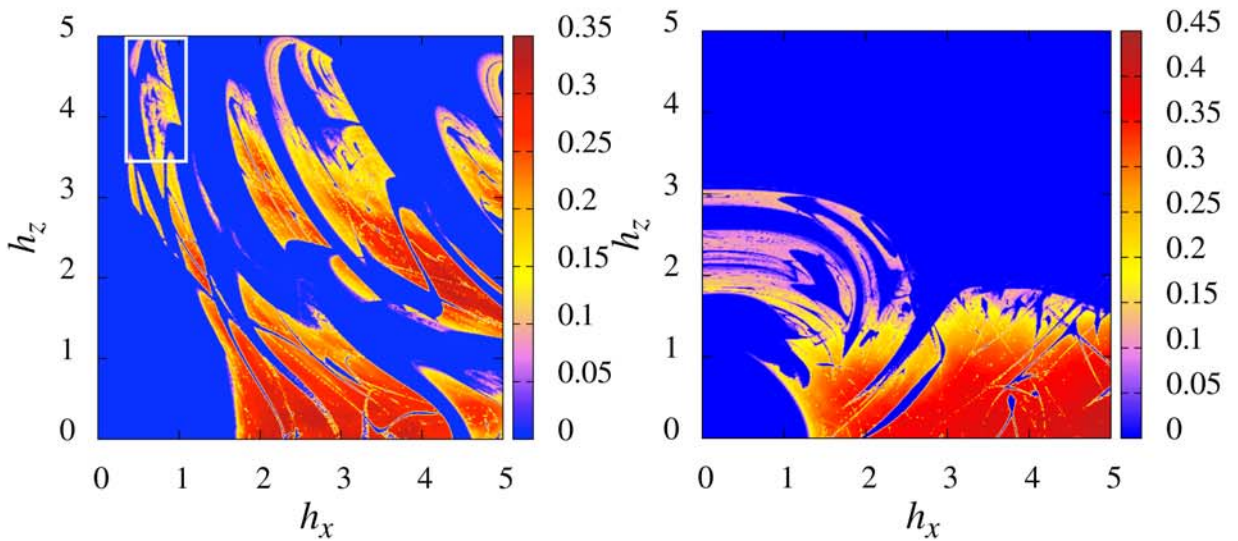


Figura 3.2: Diagrama de fase mostrando el MEL en código de colores como función de las amplitudes h_x y h_z para $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (4.0, 0, -1.0)$ (izquierda) y $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (0, 4.0, 1.0)$ (derecha). Los parámetros fijos son: $\Omega = 1.0$, $h_z = 1.0$, $\alpha_z = 0$ y $\lambda = 0.05$. Las resoluciones son $\Delta h_x = \Delta h_z = 0.01$.

Computamos diagramas de fase de dos dimensiones que muestran la magnitud de los MEL como función de dos parámetros. Esto nos permite determinar el rango de parámetros que conducen a una dinámica caótica, i.e. MELs positivos, y aquellos que muestran una dinámica regular (estacionaria, periódica o cuasiperiódica), MELs negativos o cero. Además, siguiendo la técnica explicada en la referencia [45], usamos un proceso de resolución de zoom iterativo para investigar más a fondo la dependencia de la dinámica con pequeñas variaciones de los parámetros del sistema. Esta técnica es normalmente usada para estudiar sistemas dinámicos que contienen fases caóticas con topología altamente complicada e interesantes fronteras, por ejemplo, en curvas donde redes de islas estables con oscilaciones regulares y periodicidad creciente se acumulan sistemáticamente.

La Figura 3.1 muestra un diagrama de fase en código de colores del MEL como función de la amplitud del campo oscilatorio h_x y h_y para una partícula biaxial anisotrópica ($\alpha_z = 0$). El panel de la izquierda muestra el caso cuando ambas constantes de anisotropía tiene el mismo valor ($\alpha_x = \alpha_y = 1$). En este caso, las regiones caóticas aparecen de forma circular simétrica señalando la invariancia de los LEs con respecto a la orientación de \mathbf{h}_T . Ya que la aparición del caos es independiente de las condiciones iniciales y que solamente hay un solo foco de atracción para la dinámica, la orientación de \mathbf{h}_T en el plano perpendicular es irrelevante para la posición de las regiones con LEs positivos. Observamos que no se encuentra caos para amplitudes pequeñas del campo oscilatorio transversal y que aumentando las amplitudes del campo, se alternan regiones con caos y regiones con dinámica regular. El panel de la derecha de la Fig. 3.1 muestra el caso en el que las constantes de anisotropía tienen signos opuestos ($\alpha_x = -\alpha_y = 1$). Observamos que la simetría circular se rompe y aparece una región con un patrón caótico-regular. No obstante, los MEL tiene una simetría de espejo de inversión con respecto a $h_y = 0$ y $h_x \rightarrow -h_x$. Observamos

también que para valores pequeños de ambas amplitudes, aproximadamente dentro de la región $0.761h_x^2 + 1.1h_xh_y + 8.232h_y^2 = 1$, el sistema presenta estados regulares.

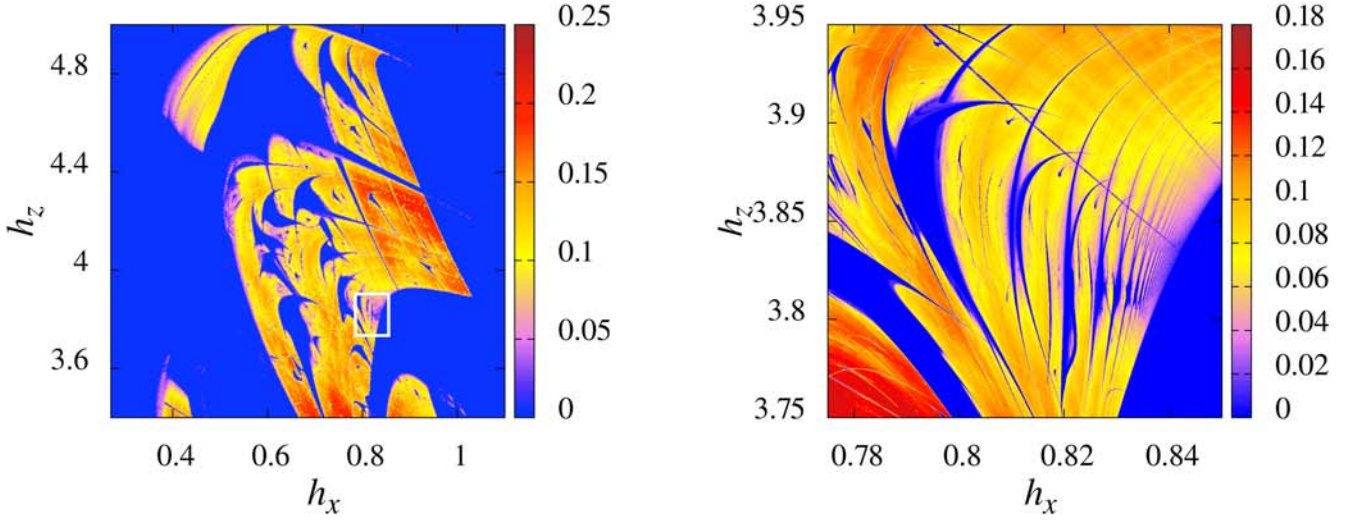


Figura 3.3: (izquierda) Ampliación de la caja blanca en el panel de la izquierda de la Figura 3.2. (derecha) Ampliación de la caja blanca del panel de la izquierda de esta figura. Las resoluciones son $(\Delta h_z, \Delta h_x) = (0.0032, 0.00166)$ y $(\Delta h_z, \Delta h_x) = (2.0 \times 10^{-4}, 7.5 \times 10^{-5})$, respectivamente.

La Figura 3.2 muestra un diagrama de fase en código de color del MEL como función de la amplitud del campo h_x y h_z del campo periódico transversal y del longitudinal constante, respectivamente. Nos enfocamos en dos casos diferentes de partículas con anisotropía bi-axial. En el panel de la izquierda los ejes principales son (\hat{x}, \hat{z}) , mientras que en el segundo son (\hat{y}, \hat{z}) . En el panel de la izquierda podemos observar que para el rango completo de h_z estudiado, se encuentran soluciones regulares para valores pequeños de h_x ($h_x \lesssim 0.3$). Para valores largos e intermedios de h_z , uno observa de nuevo alternancia de regiones caóticas y regulares según h_x aumenta. Por otra parte, el panel de la derecha de la Fig. 3.2 muestra que el caos desaparece para valores pequeños de ambos campos, aproximadamente dentro del disco definido por $h_x^2 + h_z^2 = 1.2$. El

comportamiento caótico no es observado para valores intermedio y altos del campo longitudinal ($h_z \gtrsim 3$) independiente del valor de h_x , indicando que el campo longitudinal estabiliza el sistema.

En el resto de las áreas representadas las regiones caóticas no son compactas, pero contienen muchas áreas de dinámica regular para valores específicos de las amplitudes de campo.

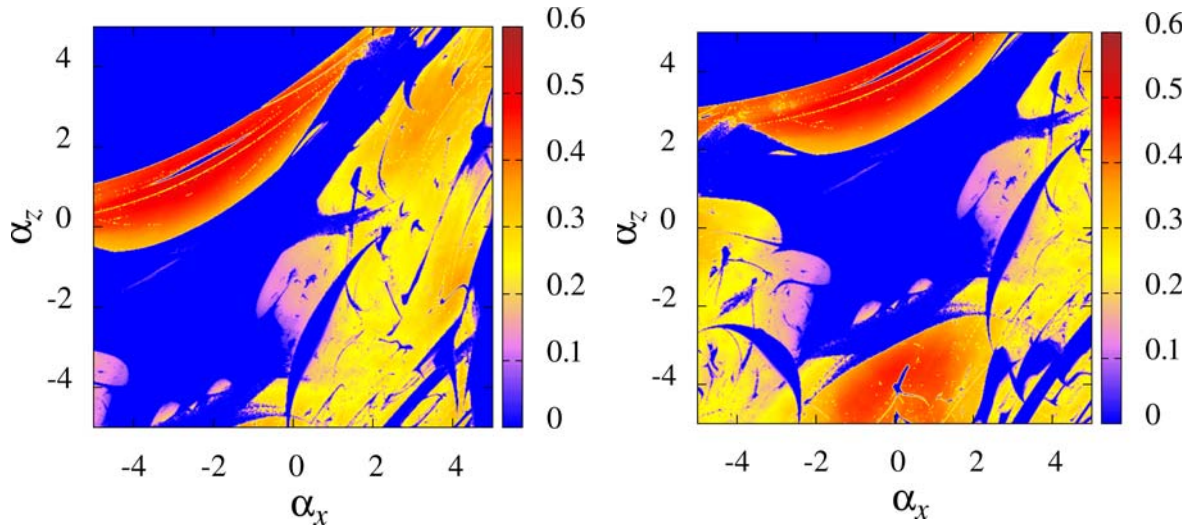


Figura 3.4: Diagrama de fase mostrando el MEL en código de colores como función de las amplitudes α_z y α_x para $\alpha_y = 0$ (izquierda) y $\alpha_y = -2.5$ (derecha). Los parámetros fijos son: $\Omega = 1.0$, $h_x = 2.45$, $h_y = 2.45$, $h_z = 0.1$ y $\lambda = 0.05$.

Las resoluciones en ambos casos son $\Delta\alpha_x = \Delta\alpha_z = 0.02$.

Para explorar con más detalle las transiciones a lo largo de los estados caóticos y regulares. La Figura 3.3 muestra sucesivas ampliaciones del panel izquierdo de la Figura 3.2. Estas ampliaciones son hechas con alta resolución. En el panel izquierdo del diagrama de fase podemos observar que hay un tipo especial de islas regulares dentro de las regiones caóticas. De hecho, estas islas tiene la forma de camarones, estas estructuras que fueron descubiertas por primera vez en el mapa de Hénon [99]. Finalmente, la ampliación mostrada en el panel de la derecha de la Figura 3.3 revela un patrón interesante en forma de una sucesión regular de camarones similares entre sí con fronteras características acumuladas en el diagrama de fase [107].

Seguidamente, caracterizamos la influencia de las constantes de anisotropía en el comportamiento dinámico resultante. La Figura 3.4 muestra un diagrama de fase como función de los coeficientes de anisotropía α_x y α_z para $\alpha_y = 0$ (izquierda) y $\alpha_y = -2.5$ (derecha). El caso de $\alpha_y = 0$ es de nuevo el de una partícula biaxial, no obstante el diagrama del MEL expone un escenario un tanto complejo sin ninguna simetría. En la región de parámetros donde las anisotropías son pequeñas e intermedias ($-1.7 \lesssim \alpha_x \lesssim 1.5$ y $-0.4 \lesssim \alpha_z \lesssim 1.2$) el sistema exhibe estados periódicos. Para anisotropías pequeñas, el comportamiento puede ser explicado por el hecho de que los términos no lineales son pequeños y el campo constante juega un rol importante en la dinámica. Para valores negativos de α_x casi encima de la curva con ecuación, $\alpha_z = 0.04165\alpha_x^2 + 0.45833\alpha_x + 4.25$, el sistema se comporta de manera regular. Nótese que dentro de las áreas caóticas principales aún existen ventanas sin caos. Por otra parte, el panel derecho de la Figura 3.4 muestra un diagrama para una partícula anisotrópica completa ($\alpha_j \neq 0$).

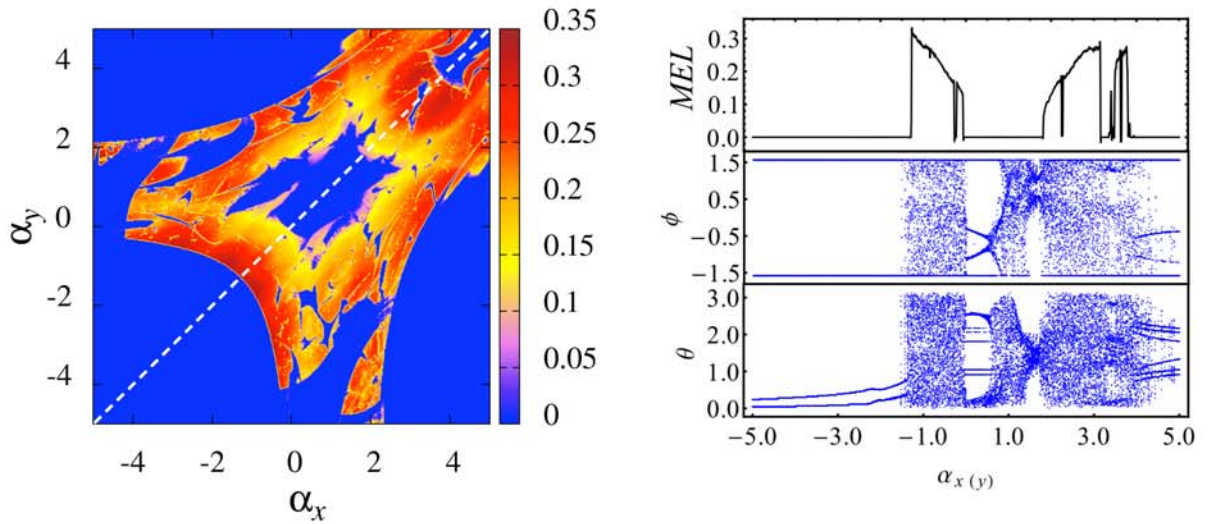


Figura 3.5: (Izquierda) Diagrama de fase mostrando el mayor exponente de Lyapunov (MEL) en código de colores como función de las amplitudes α_x y α_y . Los parámetros fijos son: $\Omega = 1.0$, $h_x = 1.0$, $h_y = 1.0$, $h_z = 0.1$, $\alpha_z = 1.0$ y $\lambda = 0.05$. Las resoluciones en ambos casos son $\Delta\alpha_x = \Delta\alpha_z = 0.02$. (derecha) MEL y diagramas de bifurcación de ϕ y θ como función de la diagonal línea (blanca-) $\alpha_{y(x)}$ dada en el panel de la izquierda.

Podemos observar un patrón similar el cual está levemente rotado y alargado con respecto al panel anterior. Aquí, la línea superior aproximada en la cual el sistema tiene estados regulares está dada por $\alpha_z = 0.17\alpha_x^2 + 1.32\alpha_x + 3.5$, tal que $\alpha_x < 0$.

El panel de más a la izquierda de la Figura 3.5 muestra un diagrama de fase como función de los coeficientes de anisotropía α_x y α_y para $\alpha_z = 1.0$. Este diagrama muestra un comportamiento simétrico de reflexión en la línea diagonal $\alpha_y = \alpha_x$. Llamamos a esta línea $\alpha_{y(x)}$ y es indicada por una línea discontinua en la figura. Para valores negativos de ambas constantes, se puede observar que los estados son periódicos aproximadamente dentro de la región $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = 3.7^2$. Los mismo ocurre para la región por encima de la curva $\alpha_y = 0.0625\alpha_x^2 + 0.525\alpha_x + 3.3$, cuando $\alpha_x \lesssim 0.5$ y para la región por debajo de la curva $\alpha_y = -1.64\alpha_x^2 + 13.97\alpha_x - 28.46$ cuando $\alpha_x \gtrsim 2.6$. En las áreas restantes el sistema es mayoritariamente caótico pero contiene islas topológicamente complejas de comportamientos regulares. Para explorar el comportamiento dinámico en la línea diagonal $\alpha_{y(x)}$ en mayor detalle, el panel de la derecha de la Figura 3.5 presenta una comparación del MEL y el diagrama de bifurcación de las variables angulares (ϕ, θ) . Aumentando el parámetro, observamos que el sistema comienza en un estado periódico y hace una transición abrupta a un comportamiento caótico. Después de esto, una alternancia de comportamientos regulares y caóticos se encuentra a medidas que avanzamos en $\alpha_{y(x)}$. Además, con la comparación del MEL y de los diagramas de bifurcación uno puede determinar de manera precisa los segmentos donde las fases regulares corresponden a estados periódicos o cuasiperiódicos. Por ejemplo, se pueden identificar oscilaciones cuasiperiódicas en el rango $(0.032, 1.77)$.

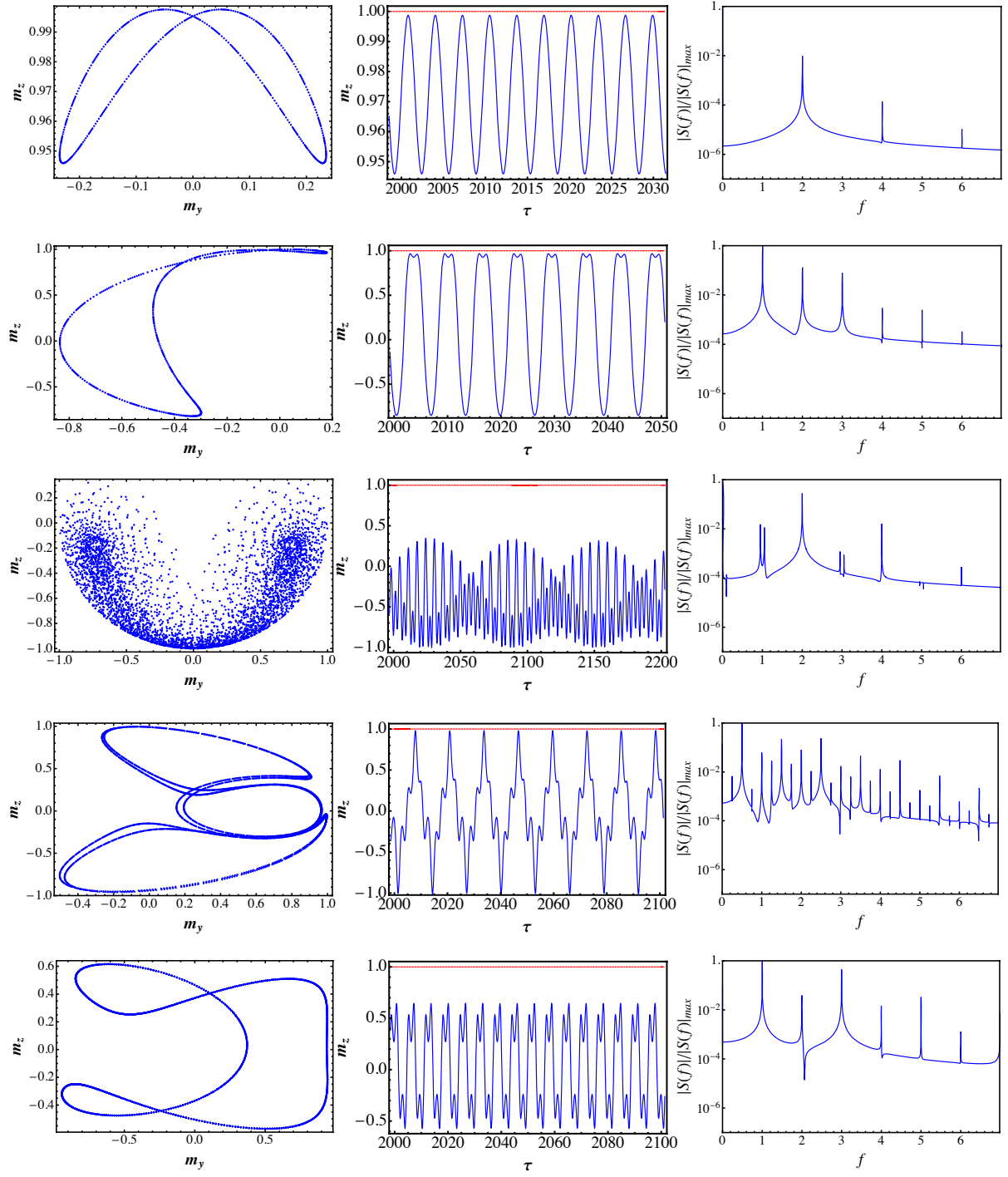


Figura 3.6: Secciones de Poincaré de (m_z, m_y) tomadas en intervalos de tiempo múltiplos de $2\pi/\Omega$, las series temporales de m_z , y su correspondiente espectro de potencias $|S(f)|$ para $\alpha_{y(x)} = (-3.5, -0.3, 0.95, 3.27, 4.95)$. La línea discontinua en la series temporales representa $|\mathbf{m}|$. Los otros parámetros fijos son los mismos que los usados en la Fig. 3.5.

Para ilustrar regímenes no caóticos diferentes que aparecen a lo largo de la diagonal $\alpha_{y(x)}$, mostramos en la Figura 3.6 la sección de Poincaré bidimensional de (m_z, m_y) en intervalos de tiempo múltiplos de $2\pi/\Omega$, las series temporales de m_z , y su correspondiente espectro de potencias $|S(f)|$ para cinco valores representativos de $\alpha_{y(x)}$, concretamente $-3.5, -0.3, 0.95, 3.27$ y 4.95 . A partir de esta figura, se puede ver que para -3.5 y -0.3 el sistema presenta estados periódicos, mientras que para los otros tres parámetros exhibe un comportamiento cuasiperiódico más complejo. De hecho para $\alpha_{y(x)} = 0.95$ la sección de Poincaré muestra un semi-toro. Estos estados muestran que no solo existe una amplia gama de transiciones de estados regulares a caótico, sino que también el estudio de los estados regulares por si mismo es un problema interesante de abordar. Se espera poder hacerlo en trabajos futuros después de haber concluido el Doctorado.

3.4 Comentarios Finales

En este capítulo hemos consideramos una situación más general de partículas con anisotropía bi-axial. Llevamos a cabo cálculos numéricos extensivos de los exponentes de Lyapunov donde variamos simultáneamente dos parámetros de control elegidos. Esto resultó en gráficos de estabilidad de las fases caóticas y regulares como función de estos parámetros. Además de una clasificación detallada de las regiones caóticas, los diagramas de fase reportados aquí también muestran dominios extendidos donde el comportamiento regular predomina. Hace algún tiempo, el espacio de parámetros de control de un oscilador amortiguado forzado de Duffin fue mostrado para reflejar ciertas estructuras complejas recurrentes [114], las cuales se asemejan de

alguna forma a las vistas aquí en las Figuras 3.2 y 3.3. Un aspecto que se quiere trabajar a futuro es la caracterización completa de los estados regulares.

Capítulo 4

Dinámica de un dímero magnético anisotrópico en presencia de un campo magnético homogéneo

En el presente capítulo se estudia la dinámica de dos partículas magnéticas anisotrópicas interactuando en presencia de un campo magnético homogéneo usando la ecuación de Landau-Lifshitz en ausencia de torques extras, es decir $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$. La interacción entre las partículas se debe a la energía de intercambio, descrita por el límite clásico de la ecuación (1.2). Examinaremos tanto el casos conservativo como el disipativo. Esencialmente los resultados que mostraremos en este capítulo han sido publicado en en la referencia [59].

4.1 Motivación del problema

El magnetismo molecular se está convirtiendo cada vez más accesible debido al notable desarrollo de técnicas experimentales y se han encontrado aplicaciones tecnológicas en diversas áreas como la computación cuántica [115, 116], almacenamiento de alta densidad de datos [117, 118] o la refrigeración magnética [119, 120], sólo por mencionar algunos. En las últimas décadas, se han sintetizado nuevos tipos de moléculas con propiedades magnéticas interesantes, en el que el momento magnético se puede colocar simétricamente en diferentes configuraciones geométricas [121]. Un ejemplo sencillo es, por ejemplo, estructuras magnéticas en forma de anillo unidimensional [122-125]. En algunos regímenes de temperatura, las propiedades magnéticas de estas moléculas son generalmente bien descritas por el modelo clásico de Heisenberg con

pequeñas correcciones de anisotropía [126, 127]. Por lo tanto, es importante para las aplicaciones un estudio detallado sobre el comportamiento dinámico de este tipo de sistemas magnéticos.

El comportamiento dinámico de unas pocas de partículas magnéticas que interactúan a través de una interacción de intercambio fue estudiado en las referencias [128-131]. Los autores se centran en el equilibrio de la función de espín-correlación para las diferentes configuraciones geométricas. El problema de la interacción de las partículas magnéticas acopladas por interacción de corto y largo alcance se analizó en las referencias [132, 133], concluyéndose que, debido a la interacción dipolar, el módulo total de la magnetización no es constante, sino una función fluctuante dependiente del tiempo. Recientemente, un dímero magnético se ha analizado en el contexto de la mecánica estadística, teniendo en cuenta el acoplamiento tanto dipolar como la interacción Dzyaloshinskii-Moriya [134]. Sin embargo, a nuestro conocimiento, un estudio paramétrico en el comportamiento dinámico y la correspondiente caracterización de los estados caóticos de dos partículas magnéticas no fueron hechas anteriormente [59].

En este capítulo describimos dicha caracterización. En particular, se estudia un campo aplicado en la dirección perpendicular a la dirección de anisotropía principal, el llamado eje fácil. Además, nos centramos en el efecto de la fuerza de interacción relativa entre las partículas. Se estudia tanto el caso conservativo como el disipativo. En el primer caso, caracterizamos el comportamiento dinámico calculando numéricamente el máximo exponente de Lyapunov y los diagramas de bifurcación. En el caso disipativo calculamos los estados de saturación final como una función de la magnitud del campo magnético aplicado, la constante de cambio, y las constantes de anisotropía.

4.2 Modelo teórico

Para modelar un dímero tenemos que tener en cuenta dos partículas magnéticas. Suponiendo que cada una puede ser representada por un monodominio magnético de magnetización \mathbf{M}^i con $i = (1, 2)$. Los campos magnéticos efectivos, \mathbf{H}_{eff}^i , están dadas por:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{ext} + \beta_i (\mathbf{M}^i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) \hat{\mathbf{n}}_i + J \mathbf{M}^k, \quad (4.1)$$

con $(i, k) = 1, 2$ tal que $i \neq k$, donde \mathbf{H}_{ext} es el campo magnético externo, β_i mide la anisotropía a lo largo del eje \mathbf{n}_i y J es la constante de acoplamiento de intercambio. Se observa que para este tipo especial de anisotropía, llamada uniaxial, las constantes β_i pueden ser positivas o negativas dependiendo de la sustancia específica y de la forma de la muestra en uso [104]. La constante de acoplamiento mide la intensidad de interacción entre las dos partículas. Note que J también puede tomar valores positivos o negativos dependiendo del tipo de interacción; por ejemplo, para $J < 0$ ($J > 0$) el acoplamiento será antiferromagnético (ferromagnético). En lo que sigue se supone que las partículas tienen la misma magnitud $|\mathbf{M}^1| = |\mathbf{M}^2| = M_s$ y el mismo eje de anisotropía $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$, tal que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. El campo magnético externo \mathbf{H}_{ext} se asume independiente del tiempo y perpendicular a \mathbf{n} , por lo que sin pérdida de generalidad, es fijado a lo largo del eje x: $\mathbf{H}_{ext} = H_x \hat{\mathbf{x}}$. Con el fin de simplificar y de caracterizar de forma genérica este sistema, nuevamente las ecuaciones de movimiento se trabajarán sin dimensión, tal que usaremos la normalización estándar $\mathbf{m}^i = \mathbf{M}^i / M_s$ y el tiempo $\tau = t |\gamma| M_s$. En tal caso, la evolución temporal del sistema puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones de Landau-Lifshitz:

$$\frac{d\mathbf{m}^i}{d\tau} = -\mathbf{m}^i \times (h_x \hat{\mathbf{x}} + \beta m_z^i \hat{\mathbf{z}} + J \mathbf{m}^k) - \lambda \mathbf{m}^i \times (\mathbf{m}^i \times (h_x \hat{\mathbf{x}} + \beta m_z^i \hat{\mathbf{z}} + J \mathbf{m}^k)), \quad (4.2)$$

dónde $h_x = H_x / M_S$. Vale la pena mencionar que, en los materiales estándar la aproximación esta aproximación de macroespín (partículas como monodominio) es solamente válida cuando los efectos de la superficie de anisotropía no son relevantes [135]. Para tamaños mayores de partículas, aparecen estados no uniforme magnéticos, como vórtices en nano-puntos de cobalto. Además, la forma de la nanopartícula juega un papel importante en la aproximación de macroespín [136]. En el caso de las moléculas magnéticas, este modelo es solamente válido en la *aproximación semiclásica* [126,127], de lo contrario los efectos cuánticos deberían ser considerados [137]. Por último, señalemos que, debido a la naturaleza no lineal del problema, las soluciones analíticas se pueden encontrar sólo en casos particulares, por lo que solo estudios numéricos son posibles.

Para evitar artefactos numéricos, es adecuado resolver la ecuación adimensional correspondiente ecuaciones (4.2) utilizando la representación cartesiana:

$$\begin{aligned} \frac{dm_x^i}{d\tau} = & m_z^i \left(Jm_y^k - \beta_i m_y^i \right) - Jm_y^i m_z^k \\ & + \lambda \left(\left(h_x + Jm_x^k \right) \left(m_y^i \right)^2 + \left(h_x + Jm_x^k \right) \left(m_z^i \right)^2 - m_x^i \left(Jm_y^i m_y^k + Jm_z^i m_z^k + \beta_i \left(m_z^i \right)^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_y^i}{d\tau} = & -h_x m_z^i + J \left(m_x^i m_z^k - m_x^k m_z^i \right) + \beta_i m_x^i m_z^i \\ & + \lambda \left(J \left(m_y^k \left(\left(m_x^i \right)^2 + \left(m_z^i \right)^2 \right) - m_y^i \left(m_x^i m_x^k + m_z^i m_z^k \right) \right) - h_x m_x^i m_y^i - \beta_i m_y^i \left(m_z^i \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_z^i}{d\tau} = & h_x m_y^i + J \left(m_y^i m_x^k - m_x^i m_y^k \right) \\ & + \lambda \left(\beta_i m_z^i \left(\left(m_x^i \right)^2 + \left(m_y^i \right)^2 \right) + J \left(m_z^k \left(\left(m_x^i \right)^2 + \left(m_y^i \right)^2 \right) - m_z^i \left(m_x^i m_x^k + m_y^i m_y^k \right) \right) - h_x m_x^i m_z^i \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Observando que las segundas filas de las ecuaciones (4.3)-(4.5) son una consecuencia del término disipativo que contienen las no-linealidades cuadráticas y cúbicas. Los términos cuadráticos se producen por el campo externo, mientras que los coeficientes cúbicos son proporcionales al intercambio y las constantes de anisotropía. La parte conservativa, en cada ecuación, contiene no-linealidades cuadráticas, y términos lineales que se generan por el campo externo. Notemos que este sistema tiene cuatro soluciones homogéneas simples:

$$\{\mathbf{m}^1, \mathbf{m}^2\} = \{\pm\hat{\mathbf{x}}, \pm\hat{\mathbf{x}}\}, \quad (4.6)$$

de forma que su estabilidad depende de los parámetros de control [40,41].

Por otra parte, remarcamos que el sistema tiene por lo menos dos constantes de movimiento (los dos módulos individuales $|\mathbf{m}^1| = |\mathbf{m}^2| = 1$). Teniendo en cuenta estas restricciones del sistema la dimensión efectiva del espacio de fase es cuatro. Además, note que cuando $\lambda = 0$, la energía magnética también se conserva. En el caso disipativo, la energía magnética no se conserva, pero alcanza un valor estacionario después de un tiempo transitorio.

Para poder entender en mejor manera este sistema dinámico dividiremos lo que resta de la subsección en subsubsecciones. Primeramente comentaremos sobre el método numérico e indicadores dinámicos. Después estudiaremos las soluciones conservativas, y finalmente las soluciones disipativas.

4.3 Simulaciones

El sistema dinámico descrito por las ecuaciones (4.3)-(4.5) no se puede resolver analíticamente para todos los casos, esto es debido al acoplamiento y no-linealidades. Por lo tanto, se debe resolver numéricamente. Desde el punto de vista numérico, la integración de estas ecuaciones se realiza utilizando un método estándar de integración Runge-Kutta de cuarto orden [41]. El paso de tiempo utilizado es de $d\tau = 0.01$, que garantiza una precisión de 10^{-7} en la

magnetización. Para verificar que el método funciona se calcula ambas constante de movimiento, $|\mathbf{m}^1| = |\mathbf{m}^2| = 1$, de forma dinámica. Como lo comentamos en el capítulo 2, el método de principal de caracterización será el máximo exponente de Lyapunov (MEL).

4.3.1 Caso Conservativo

En este apartado se analiza la dinámica de las ecuaciones (4.3)-(4.5) cuando la disipación es cero, $\lambda = 0$. Estas ecuaciones pueden tener diferentes tipos de comportamientos, de regular a caótico. Un caso interesante, en el cual el sistema tiene una solución analítica, es cuando las anisotropías son nulas, esto significa $\beta_1 = \beta_2 = 0$. De hecho, la magnetización total $\mathbf{L} = \mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2$ satisface:

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\tau} = -\mathbf{L} \times \mathbf{h}, \quad (4.9)$$

que es la ecuación de un solo momento magnético en presencia de un campo magnético y su solución es

$$\mathbf{L}(\tau) = \begin{pmatrix} L_x(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_y(0) \\ L_z(0) \end{pmatrix} \cos(h_x \tau) + \begin{pmatrix} 0 \\ L_z(0) \\ -L_y(0) \end{pmatrix} \sin(h_x \tau), \quad (4.10)$$

donde $L_j(0)$ son las condiciones iniciales a lo largo del módulo de las limitaciones individuales.

Además, cuando el sistema es anisotrópico $\beta_j \neq 0$ las únicas soluciones analíticas son posibles cuando las partículas están desacopladas $J = 0$. En tal caso las soluciones están en la forma de las funciones elípticas como se mostró en el capítulo 2 [17]. Cuando $\beta_j \neq 0$ y $J \neq 0$ solo soluciones numéricas son posibles.

Las Figuras 4.1 y 4.2 muestran diagramas de fase de código de colores para los MEL como una función de J y h_x para valores diferentes e iguales de las constantes de anisotropía, respectivamente. En ambos casos sus valores absolutos son el mismo, de tal forma que $|\beta_1| = |\beta_2| = 0.1$. Los paneles de la izquierda muestran una amplia gama de los parámetros, mientras que los marcos de la derecha muestran un zoom específico del marco de la izquierda correspondiente. La zona del zoom se indica mediante un cuadro negro. Podemos observar que la energía de anisotropía juega un papel importante, ya que los diagramas son completamente diferentes.

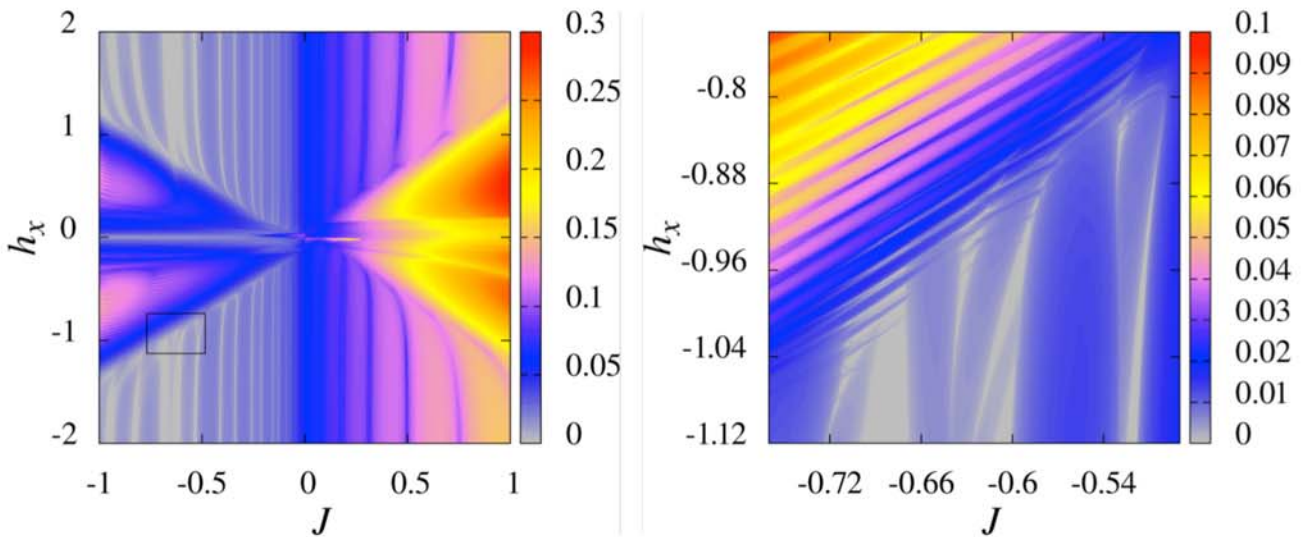


Figura 4.1: Diagrama de fase que muestra el Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) en código de colores como función de la amplitud del campo h_x y la constante de acoplamiento J para dos niveles diferentes de resoluciones. Los parámetros fijos son: $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = -0.1$ y $\lambda = 0$. En ambos casos la resolución es de $10^3 \times 10^3$ exponentes de Lyapunov.

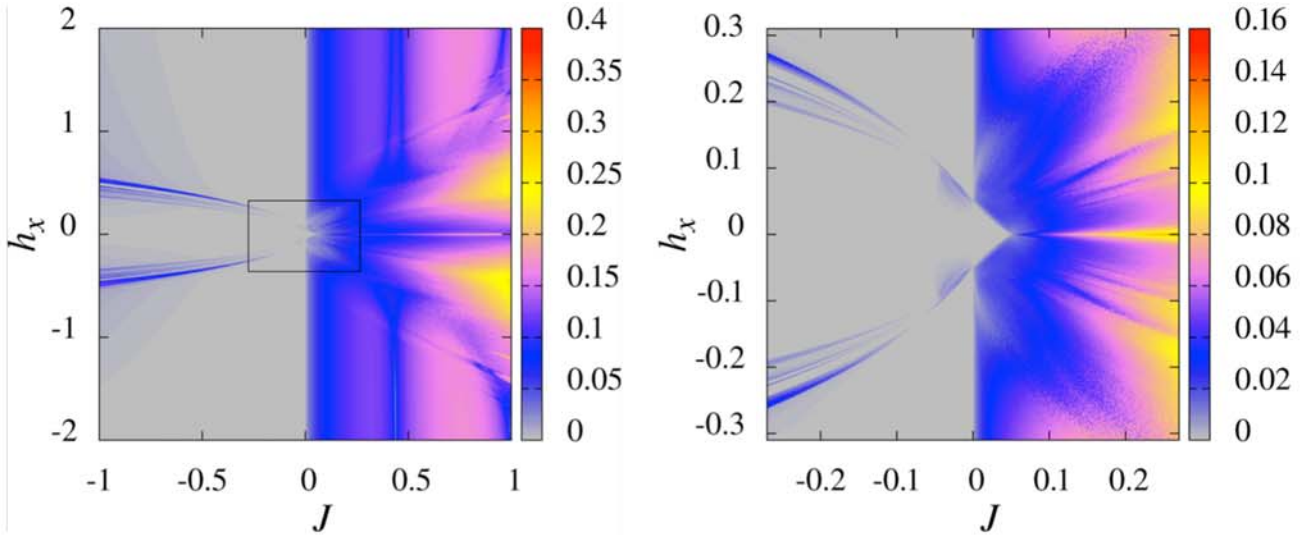


Figura 4.2: Diagrama de fase que muestra el Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) en código de colores como función de la amplitud del campo h_x y la constante de acoplamiento J para dos niveles diferentes de resoluciones. Los parámetros fijos son: $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$ y $\lambda = 0$. En ambos casos la resolución es de $10^3 \times 10^3$ exponentes de Lyapunov.

Para diferentes anisotropías (Fig. 4.1) cuando la constante de intercambio de acoplamiento es positiva ($J > 0$) el sistema está siempre en regímenes caóticos, mientras que para valores negativos de J , aparecen múltiples transiciones entre regímenes regulares y caóticos. Estas transiciones se pueden observar con una mejor resolución en el panel derecho de la Fig. 4.1, en la que aparecerán patrones complejos en el diagrama de MEL.

La Figura 4.2 muestra los MEL como una función de h_x y J para constantes de anisotropía iguales. Podemos observar que cuando J es negativo, el sistema se comporta casi regular, excepto por cuatro columnas situadas simétricamente respecto a h_x . Para valores positivos de J el sistema está en regímenes caóticos excepto para una pequeña región cuando los valores de h_x . Para cuantificar la dinámica de esta región de muestra un zoom en el cuadro de la derecha. Claramente observamos que existe un triángulo cercano $J \sim 0$ donde el sistema se mantiene en regímenes periódicos, luego los estados son esencialmente caóticos.

Con el fin de investigar en más detalle diferentes tipos de transiciones entre comportamiento regular y comportamiento caótico analizamos una sección transversal vertical de la Figura 4.2 en el rango $-0.4 \leq h_x \leq 0.4$ para $J = -0.2$.

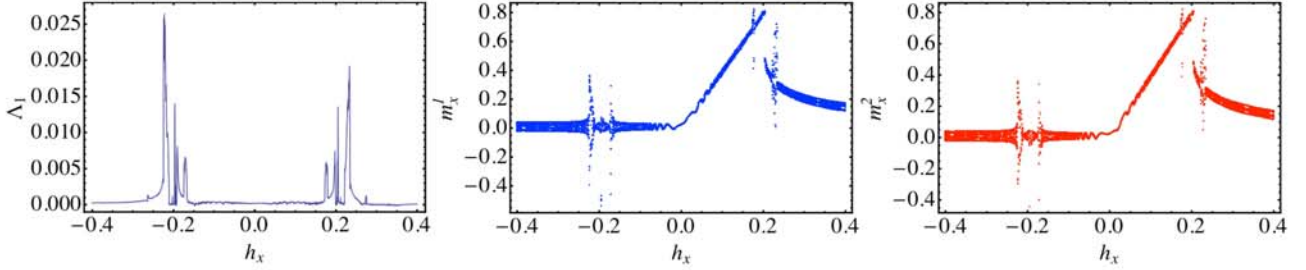


Figura 4.3: Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) y diagramas de bifurcación de m_x^1 y m_x^2 en función de h_x . Los parámetros fijos son: $J = -0.2$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$ y $\lambda = 0$.

En la Figura 4.3 se muestra el MEL y los diagramas de bifurcación para m_x^1 y m_x^2 como función de h_x . Del MEL observamos que el sistema se inicia en estados regulares y presenta una transición a comportamientos caóticos para valores cercanos a $h_x \approx -0.265$. Por encima de este, se encuentran alternancia de comportamientos regulares y caóticos medida que aumenta el parámetro h_x . Para valores $h_x \gtrsim 0.28$ el sistema solo exhibe estados regulares. Por último, se observa que existe una correspondencia entre ambas componentes x , como se muestra en los diagramas de bifurcación. De hecho, como podemos observar los estados regulares antes del régimen caótico son cuasiperiódico, ya que el diagrama de bifurcación muestra una zona densa (pero compacta) de máximos. En el caso de los estados caóticos podemos ver que en ambos diagramas de bifurcación se observa que los máximos de m_x^j están repartidos en un amplio espectro de valores. Además, hacemos notar que en la región central, $-0.16 \lesssim h_x \lesssim 0.16$, de la Figura 4.3 los tipos de periodicidad son bastantes diferentes a los observados en ambos extremos de los valores del

campo, es decir $h_x \lesssim -0.28 \wedge h_x \gtrsim 0.28$. Para ejemplificar lo dicho anteriormente, tomemos tres valores específicos de campo magnético.

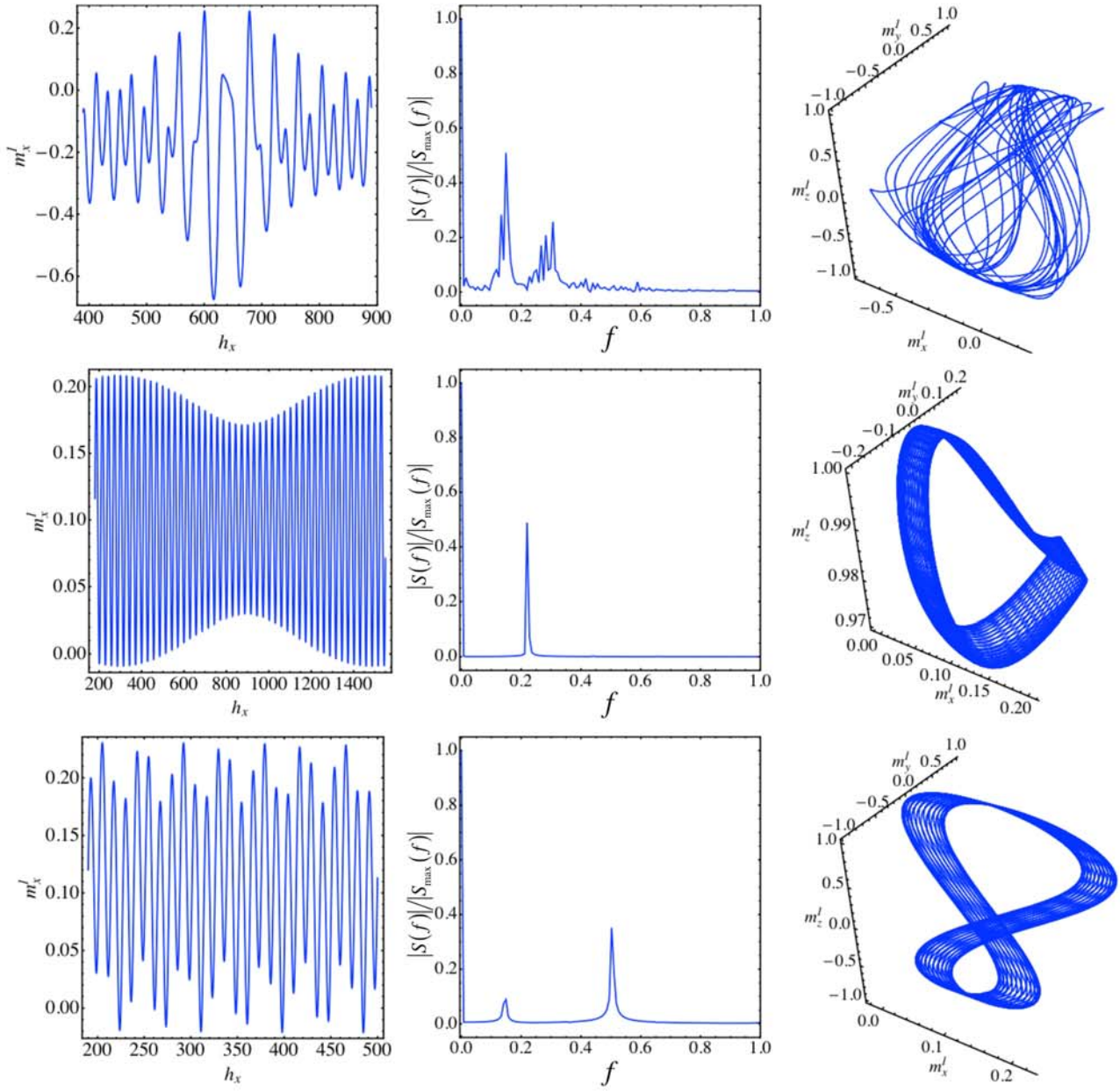


Figura 4.4: Serie de tiempo de m_x^l (izquierda), su transformada de Fourier correspondiente (centro), y diagrama paramétrico tridimensional de \mathbf{m}^l , para tres valores de campo: $h_x = -0.22$ (arriba), $h_x = -0.22$ (medio) y $h_x = -0.22$ (abajo). Los otros parámetros fijos son los mismo de la Figura 4.3.

La Figura 4.4 muestra tanto la serie temporal de m_x^1 con su correspondiente transformada de Fourier normalizada a la unidad $|S(f)|/|S_{\max}(f)|$, como también la evolución paramétrica de \mathbf{m}^1 para tres valores particulares de campo. En el primer caso $h_x = -0.22$ tal que estado dinámico es caótico. Esto se puede observar tanto en la serie temporal que es aperiódica, como en la transformada de Fourier que tiene múltiples picos. Además, claramente el diagrama de fases tridimensional es un atractor extraño. En los siguientes dos casos particulares a $h_x = -0.22$ y $h_x = -0.22$ se muestran dos estados cuasiperiodicos diferentes. El segundo caso tiene dos frecuencias dominantes, mientras que en el tercero son tres como se pueden apreciar en la FFT. Ambos diagramas de fases son toros dentro la esfera unidad $|\mathbf{m}^1| = 1$. En el segundo caso podemos notar que las amplitudes la componente-z de la magnetización varían poco, y están en un rango cercano a la unidad; mientras que en el tercer caso cubre casi todo el rango de valores posibles, es decir $(-1,1)$. En el caso de la componente-x las fluctuaciones en ambos casos están en el rango $(0, .25)$.

4.3.2 Caso Disipativo

En este apartado se analiza el caso de un sistema disipativo, $\lambda \neq 0$. Los valores del coeficiente de amortiguamiento pueden variar varios ordenes de magnitud. En el caso de magnetismo molecular son por lo general bastante pequeños, de ahí primeramente fijamos su valor en $\lambda = 5 \times 10^{-4}$. En este caso, las soluciones comunes son las estacionarias y los ciclos limites. Siendo muchísimo más típicas las primeras, las cuales llegan al equilibrio y alcanzan su valor constante después de un tiempo transitorio, como se muestra en la Figura 4.5. Estos estados estacionarios finales son fuertemente dependiente de los valores de los parámetros. De hecho, la magnetización de las dos partículas puede ir al mismo valor o no, como se muestra en el marco

izquierdo de la Fig. 4.5. El tipo de transiente puede ser regular (como en las oscilaciones armónicas amortiguadas clásicas) o caóticas, dependiendo del estado correspondiente del caso no disipativo.

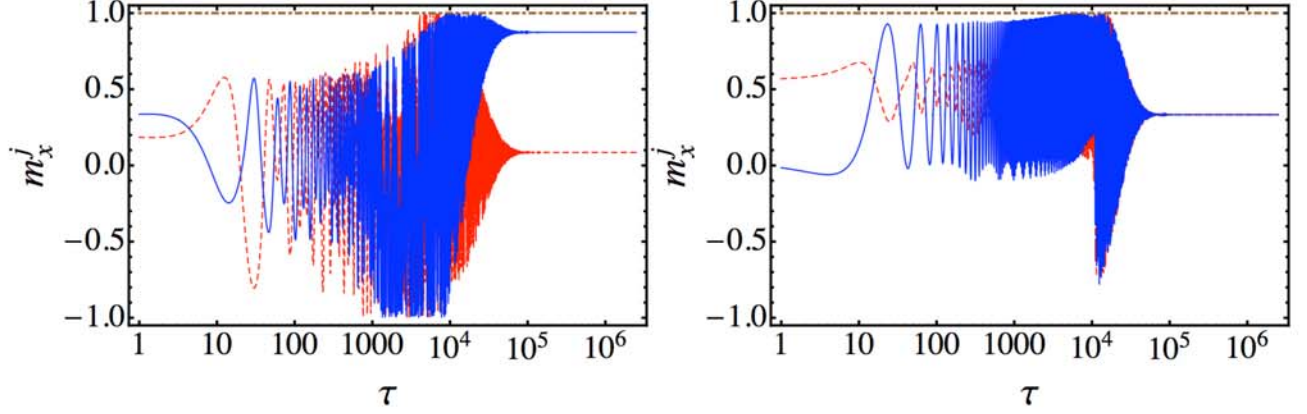


Figura 4.5: Series temporales de las componente-x de las partículas m_x^1 y m_x^2 , y el modulo de la primera partícula $|\mathbf{m}^1|$. Las líneas discontinua y continua representan m_x^1 y m_x^2 , respectivamente, mientras que la línea de trazos y puntos representan al módulo. Los parámetros fijos son $h_x = 0.1$, $J = -0.1$, $\beta_1 = 0.1$ y $\lambda = 5 \times 10^{-4}$. El panel derecho es para $\beta_2 = 0.1$ y el izquierdo es para $\beta_2 = -0.1$.

La tasa de decaimiento característica puede ser dilucidada a partir del análisis lineal. Para estimar dicha tasa, se comienza con una solución homogénea del sistema $\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^2 = \hat{\mathbf{x}}$ cuando $h_x > 0$. De acuerdo a la condición de conservación del modulo de la magnetización, tenemos que

$m_x^j = \sqrt{1 - \left((m_y^j)^2 + (m_z^j)^2 \right)}$. Luego para las pequeñas desviaciones la componente a lo largo del eje

$\hat{\mathbf{x}}$ se puede expresar como:

$$m_x^j \approx 1 - \frac{(m_y^j)^2 + (m_z^j)^2}{2}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, utilizando una linealización estándar [41] el sistema queda:

$$\frac{dm_y^j}{d\tau} = -\lambda(h_x + J)m_y^j + (\beta_j - h_x - J)m_z^j + \lambda Jm_y^k + Jm_z^k, \quad (4.12)$$

$$\frac{dm_z^j}{d\tau} = (h_x + J)m_y^j + \lambda(h_x + J - \beta_j)m_z^j - Jm_y^k + \lambda Jm_z^k, \quad (4.13)$$

donde todos los términos de orden $\Theta(m_{a,b}^n)$ con $n > 2$ han sido despreciados. Por lo tanto, el sistema lineal se caracteriza por la matriz:

$$\begin{pmatrix} -(h_x + J)\lambda & -h_x - J + \beta_1 & J\lambda & J \\ h_x + J & (-h_x - J + \beta_1)\lambda & -J & J\lambda \\ J\lambda & J & -(h_x + J)\lambda & -h_x - J + \beta_2 \\ -J & J\lambda & h_x + J & (-h_x - J + \beta_2)\lambda \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Los valores propios de esta matriz, σ , son obtenidos usando las raíces de la ecuación secular:

$$\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0 = 0, \quad (4.15)$$

donde a_j , en regímenes débilmente disipativos, están dados aproximadamente por

$$a_3 = \lambda(4(h_x + J) - \Sigma), \quad (4.16a)$$

$$a_2 = 2h_x^2 + (4J - \Sigma)(h_x + J), \quad (4.16b)$$

$$a_1 = \lambda(4h_x^3 + 3h_x^2(4J - \Sigma) + 2h_x(4J^2 - 3J\Sigma + \Pi) - 2J(J\Sigma - \Pi)), \quad (4.16c)$$

$$a_0 = h_x(h_x + 2J)(h_x^2 + h_x(2J - \Sigma) - J\Sigma + \Pi), \quad (4.16d)$$

con $\Sigma = \beta_1 + \beta_2$ y $\Pi = \beta_1\beta_2$. En general, los valores propios son funciones complejas,

$\sigma = \sigma_R + i\sigma_I = -\eta + i\Omega$ de modo que η es el factor de crecimiento de la perturbación y Ω su frecuencia. Usando la inversa del factor de crecimiento se puede calcular la tasa de decaimiento característica, denotada aquí por τ_c . Puesto que, la ecuación para σ , es de cuarto orden, una forma cerrada es difícil de obtener analíticamente, y debe ser calculada numéricamente. Sin embargo, como una primera aproximación la tasa de decaimiento característica es

$$\tau_c \approx 4 / \left[(4(h_x + J) - \Sigma)\lambda \right].$$

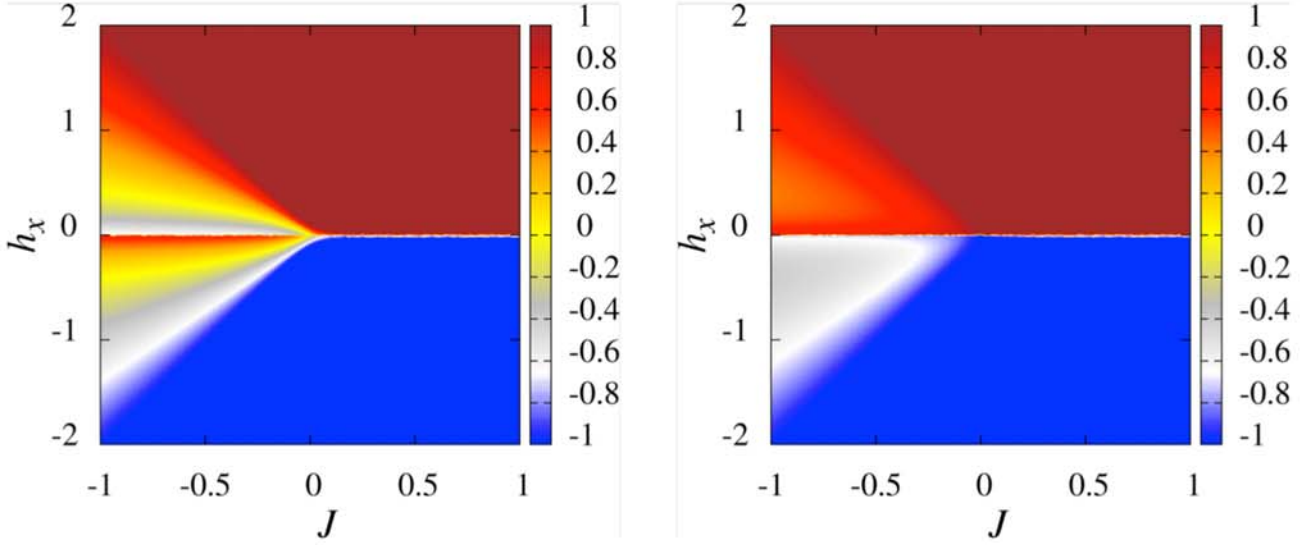


Figura 4.6: Diagrama de fases que muestra el valor de saturación de \tilde{m}_x^1 (izquierda) y \tilde{m}_x^2 (derecha) en función de h_x y J . Los parámetros fijos son: $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = -0.1$ y $\lambda = 5 \times 10^{-4}$.

Cuando $J \rightarrow 0$ y $\beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow -|\beta|$ el tiempo característico se reduce a $\tau_c \rightarrow 2 / [(|\beta| + 2h_x) \lambda]$, que tiene la misma estructura que la obtenida previamente en la referencia [138]. En el sistema desacoplado, cuando β es positivo σ_R pasa a ser positivo para $\beta > 2h_x$ produciéndose una inestabilidad lineal. En nuestro caso con $J \neq 0$, cuando una de la constantes de anisotropía tiene signo diferente la solución siempre se descompone si $J > 0$ y si tienen el mismo signo la condición de $h_x > -J + \Sigma / 4$ garantiza que el sistema no sufrirá una inestabilidad lineal.

Veamos ahora a describir cómo el valor de saturación dinámico de la magnetización, $\tilde{m}_a^j = m_a^j(\tau \rightarrow \infty)$, cambia con los parámetros de control. La Figura 4.6 muestra dos diagramas de \tilde{m}_x^1 y \tilde{m}_x^2 como una función del campo externo, h_x y la constante de acoplamiento J . Cada punto en este diagrama se ha calculado numéricamente con tiempo de integración suficiente para evitar los transientes ($\tau \gtrsim 10^8$) y con la condición inicial aleatoria (ICs) en las esferas $|\mathbf{m}^1| = 1$ y $|\mathbf{m}^2| = 1$ con el fin de obtener resultados con independencia de los ICs. Observamos que cuando la

constante de acoplamiento es positiva $J > 0$, la magnetización de las dos partículas tiende a $(\pm)\hat{x}$, dependiendo de la amplitud del campo magnético h_x . Sólo en la interface cerca $h_x \sim 0$ la magnetización sufre perturbaciones respecto al eje x. Por otro lado, para $J > 0$, sólo cuando h_x es más grande que la unidad ($|h_x| > 1$), la magnetización \mathbf{m}^1 y \mathbf{m}^2 están orientadas a lo largo del campo exterior o bien, que se orientan en otros ejes que dependen del valor de J y no están correlacionados.

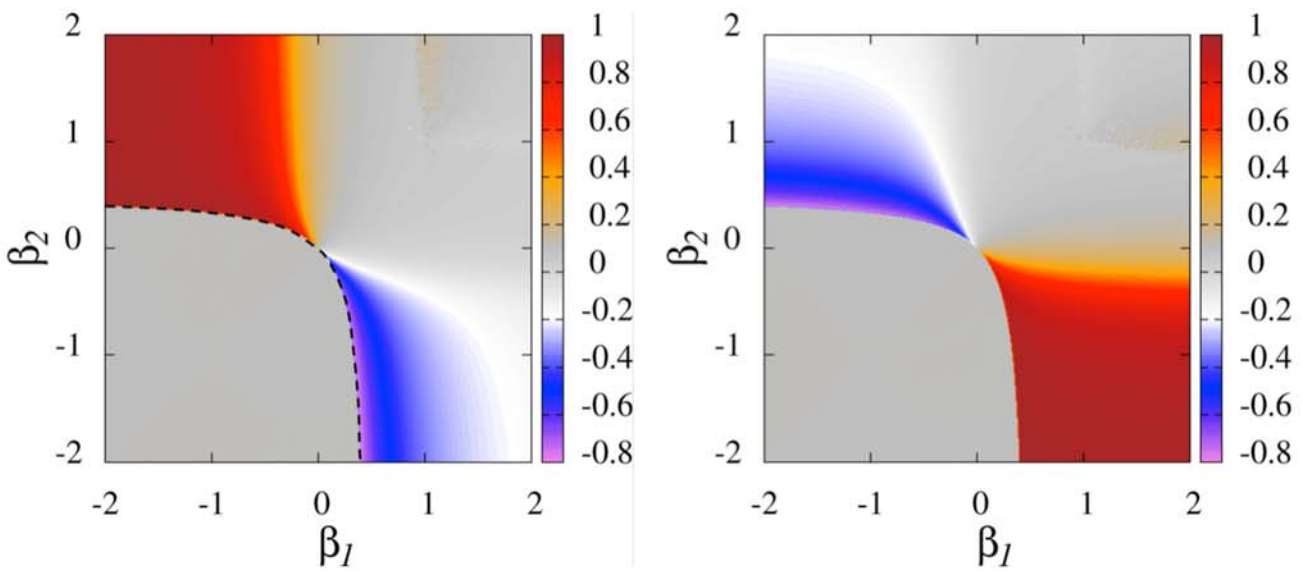


Figura 4.7: Diagrama de fases que muestra el valor de saturación de \tilde{m}_x^1 (izquierda) y \tilde{m}_x^2 (derecha) en función de β_1 y β_2 . Los parámetros fijos son: $h_x = 0.1$, $J = -0.1$ y $\lambda = 5 \times 10^{-4}$. La línea discontinua es un ajuste dado por la ecuación (4.17) del texto.

Además, se analiza los efectos de la anisotropía sobre dinámica de saturación de los valores. La Figura 4.7 muestra dos diagramas de \tilde{m}_x^1 y \tilde{m}_x^2 como una función de las constantes anisotropía β_1 y β_2 para valores negativos de J y pequeños campos $h_x = 0.1$. Esta es la zona de la figura anterior cuando la magnetización de la partícula uno no se correlaciona con la magnetización de la partícula dos. Observamos que en la región intermedia los valores de \tilde{m}_x^1 y

\tilde{m}_x^2 están en oposición de fase, de tal manera que la línea anti-simetría es la diagonal $\beta_1 = \beta_2$. Por otra parte, debajo de la curva

$$\beta_2 = \begin{cases} a \tanh(b\beta_1 + c) & \beta_1 \in (-2.0, 0) \\ \tanh^{-1}(\beta_1 / a - c) / b & \beta_1 \in (0, 0.378) \end{cases} \quad (4.17)$$

tanto \tilde{m}_x^1 y \tilde{m}_x^2 son cero cuando $(a, b, c) = (-0.3845, 1.3477, -0.0442)$. De hecho, en este rango de los estados de magnetización finales están orientadas a lo largo del eje z ($\tilde{m}_z^1 = \tilde{m}_z^2 = 1$), que es el eje de anisotropía. Además, se puede observar que cerca de $\beta_1 \approx 1$ y en $\beta_2 \gtrsim 1$ el marco izquierdo de la Figura 4.7 hay un cúmulo aislado de los puntos en los cuales $\tilde{m}_x^a \neq 0$ con pequeña amplitud.

4.4 Comentarios Finales

Hemos estudiado un dímero magnético en presencia de un campo externo aplicado, teniendo en cuenta la energía anisotropía y la interacción de intercambio entre partículas. Se ha considerado este modelo prototipo ya que puede ser una herramienta interesante para describir moléculas magnéticas en la aproximación semiclásica [126, 127], o dos partículas magnéticas interactuando en la aproximación macroespín cuando las energías de superficie pueden ser despreciadas [135]. En el caso conservativo, se encontró que para acoplamientos positivos, el sistema es caótico en una amplia gama de valores de campo magnético si las constantes de anisotropía son iguales. En el caso de dinámica disipativa se ha calculado numéricamente la solución final estacionaria después de un transiente. Finalmente, observamos que debido a la interacción entre las partículas, se pueden observar diferentes tipos de sincronizaciones. La investigación adicional en esta dirección será parte de las investigaciones a futuras.

Capítulo 5

Dinámica de dipolos magnéticos en presencia de un campo magnético dependiente del tiempo

En el presente capítulo se estudia la dinámica de dos partículas magnéticas anisotrópicas interactuando en presencia de un campo magnético dependiente del tiempo usando la ecuación de Landau-Lifshitz. La interacción entre las partículas se debe a la energía dipolar. Examinaremos tanto la dinámica como la sincronización de las partículas. Esencialmente los resultados que mostraremos en este capítulo han sido publicados en las referencias [\[60,61\]](#).

5.1 Motivación del problema

Como hemos visto anteriormente un sistema de dos partículas magnéticas pueden tener diferentes tipos de aplicaciones. En general, se ha estudiado el efecto de campos magnéticos constantes cuando la interacción entre las partículas está basada en el intercambio de energía [\[58,128-131\]](#). Sin embargo, otros tipos de interacción entre partículas es posible. De ellas, quizás la más importante es la interacción dipolar, debido a su naturaleza de largo alcance [\[9,20\]](#). De hecho, recientemente en nuevos nanomateriales conocidos como hielos de espín se ha mostrado que esta interacción juega un rol fundamental [\[139-143\]](#).

Estudios sobre la dinámica de dos dipolos que interactúan en presencia de un campo magnético externo homogéneo fueron presentados aproximadamente hace una década [\[132,133\]](#). Los autores encontraron que la magnetización total no se conserva. El caso conservativo es una

función fluctuante del tiempo con una fuerte dependencia de la fuerza del término dipolar. En el caso disipativo hay un tiempo transitorio antes de que la magnetización alcance su valor constante. Sin embargo, se han encontrado estados caóticos no permanentes [133]. Por lo cual, agregar un campo dependiente del tiempo generará dicha posibilidad tal como se estudio en el capítulo 3. Más aun, como el sistema tiene una dimensión efectiva cinco, diferentes combinaciones de valores de parámetros pueden conducir al sistema a soluciones hipercaóticas, que es cuando dos o más exponentes de Lyapunov son positivos [91]. Este tipo de estados no son posibles en una única partícula, lo cual da un aspecto novedoso al presente modelo desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Por otra parte, la interacción entre dos sistemas dinámicos acoplados puede producir diferentes tipos de sincronización (completa, en fase, desfasada, etc.) [144]. La sincronización entre sistemas caóticos ha sido estudiada en sistemas temporales y espacio-temporales con simetrías más allá del acoplamiento maestro-esclavo [145,146] y han sido ampliamente revisados en las referencias [147-149]. Además, se han estudiado los efectos de anisotropía en el acoplamiento [150]. Es bien conocido que la sincronización en presencia de anisotropía puede aumentarse [151], o bien suprimir el comportamiento caótico en sistema de tres dimensiones [152]. En sistemas hipercaóticos, se logra sincronización sin supresión del caos, pero la complejidad del sistema puede ser modificada [94-96]. Otros trabajos en relación al sincronismo en modelos hipercaóticos pueden ser encontrados en las referencias [153-157]. En este capítulo ahondaremos en la caracterización tanto de la dinámica como de la sincronización entre dipolos. La caracterización de la dinámica se hará mediante el cómputo de exponentes de Lyapunov. Mientras que el estudio de la sincronización será por medio del coeficiente de Pearson de las componentes z de las partículas, y de la medida de la diferencia de fases. En particular, nos centraremos en estados de antisincronización caótica e hipercaótica.

5.2 Modelo Teórico

Consideremos dos partículas magnéticas anisotrópicas en presencia de un campo magnético externo, \mathbf{H}_{ext} . Asumimos que cada partícula puede ser representada por un dominio magnético de magnetización \mathbf{M}^i con $i = (1, 2)$. Asumimos que el acoplamiento entre las partículas es debido a la interacción dipolar, y por tanto, el campo magnético efectivo de cada partícula, \mathbf{H}_{eff}^i , está dado por

$$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{ext} + \beta_i (\mathbf{M}^i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) \hat{\mathbf{n}}_i + d^{-3} (3(\mathbf{M}^k \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}^k), \quad (5.1)$$

siendo $(i, k) = (1, 2)$ tal que $i \neq k$. Aquí β_i mide la anisotropía a lo largo del eje $\hat{\mathbf{n}}$, d es la distancia entre dos momentos magnéticos, y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario a lo largo de la dirección entre dos partículas. En lo que sigue, supondremos que las partículas tienen la misma magnitud $M_S^1 = M_S^2 = M_S$ y la misma anisotropía $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ y $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \hat{\mathbf{z}}$. Con estas consideraciones podemos normalizar el sistema en la forma usual $\mathbf{m}^i = \mathbf{M}^i / M_S$, consecuentemente $\mathbf{h}_{eff}^i = \mathbf{H}_{eff}^i / M_S$ y $\mathbf{h}_{ext}^i = \mathbf{H}_{ext}^i / M_S$. Aplicamos un campo magnético externo que comprende ambas, una parte constante longitudinal y una parte transversal periódica con una amplitud y frecuencia fija, es decir

$$\mathbf{h}_{ext} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_T \sin(\Omega \tau), \quad (5.2)$$

donde $\mathbf{h}_0 (\parallel \hat{\mathbf{z}})$ y $\mathbf{h}_T (\perp \hat{\mathbf{z}})$ y Ω son constantes. El tiempo t y la frecuencia ω están normalizados por $\tau = |\gamma| M_S t$ y por $\Omega = \omega / (|\gamma| M_S)$, respectivamente. El eje $\hat{\mathbf{r}}$ es elegido perpendicular al eje de anisotropía, en particular escogemos $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$. Hacemos notar que la configuración de campo externo es la misma usada en capítulo 3. Adicionalmente, podemos ver que el tipo de interacción

es bastante diferente a la usada en el capítulo 4. La interacción dipolar es típica de materiales ferromagnéticos que se ocupan en elementos de grabación magnética.

5.3 Caracterización de la dinámica

La evolución temporal del sistema puede ser modelada por ecuación de Landau-Lifshitz en su forma adimensional (2.18). En su representación cartesiana esta se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{dm_x^i}{d\tau} = & -h_z \left(m_y^i + \lambda m_x^i m_z^i \right) + \left(h_y \left(m_z^i - \eta m_x^i m_y^i \right) + \lambda h_x \left(\left(m_y^i \right)^2 + \left(m_z^i \right)^2 \right) \right) \sin \xi \\ & + d^{-3} \left(m_z^k + \lambda m_y^k m_x^i \right) m_y^i - \left(\beta m_y^i + d^{-3} \left(m_y^k - \lambda m_z^k m_x^i \right) \right) m_z^i \\ & + 2\lambda d^{-3} m_x^k \left(m_y^i \right)^2 - \lambda \left(\beta m_x^i - 2d^{-3} m_x^k \right) \left(m_z^i \right)^2, \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_y^i}{d\tau} = & h_z \left(m_x^i - \lambda m_y^i m_z^i \right) - \left(h_x \left(m_z^i + \lambda m_x^i m_y^i \right) - \lambda h_y \left(\left(m_z^i \right)^2 + \left(m_x^i \right)^2 \right) \right) \sin \xi \\ & - \lambda \left(\beta m_y^i + d^{-3} m_y^k \right) \left(m_z^i \right)^2 - d^{-3} \left(m_z^k + 2\lambda m_x^k m_y^i \right) m_x^i - \lambda d^{-3} m_y^k \left(m_x^i \right)^2 \\ & + \left(\beta m_x^i - d^{-3} \left(2m_x^k - \lambda m_z^k m_y^i \right) \right) m_z^i, \end{aligned} \quad (5.3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_z^i}{d\tau} = & \left(h_x \left(m_y^i - \lambda m_x^i m_z^i \right) - h_y \left(m_x^i + \lambda m_y^i m_z^i \right) \right) \sin \xi \\ & + d^{-3} \left(\left(m_x^i m_y^k + 2m_x^k m_y^i \right) + \lambda \left(m_y^k m_y^i - 2m_x^k m_x^i \right) m_z^i \right) \\ & + \lambda \left(\left(m_x^i \right)^2 + \left(m_y^i \right)^2 \right) \left(h_z + \beta m_z^i - d^{-3} m_z^k \right), \end{aligned} \quad (5.3c)$$

con $(i,k)=(1,2)$ tal que $i \neq k$. Aquí usaremos un método de Runge-Kutta de quinto orden de paso variable [158] que asegura un error relativo de 10^{-7} en el campo de magnetización. Los ELs han sido hallados durante un periodo de $\tau = 80000$ después de un tiempo transitorio inicial de $\tau = 4000$ que ha sido descartado. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt es llevado a

cabo cada $\delta\tau = 3.91$. El error estimado es de $E = 0.1\%$, el cual es lo suficientemente pequeño para el objetivo del presente análisis. Debido al gran número de parámetros envueltos en el sistema, $\beta = 1$, $h_y = 1$, $\Omega = 0.5$ y $\lambda = 0.05$ son fijados durante el estudio. Los parámetros (h_x, h_z, d) variarán dependiendo de la simulación presentada.

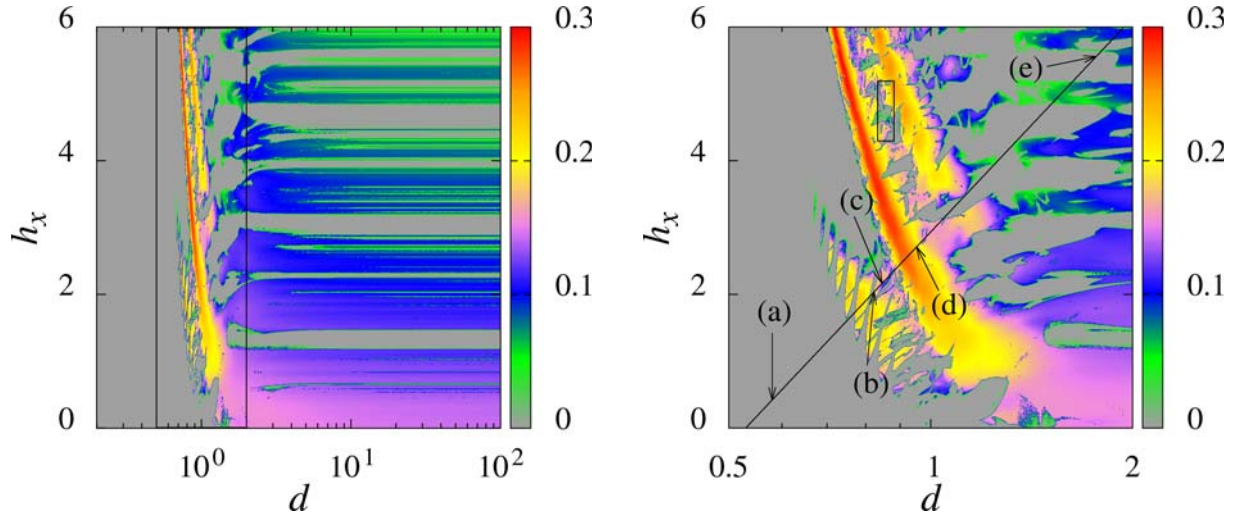


Figura 5.1: (Izquierda) Diagrama de fase en el que se muestra el MEL en código de colores como función de la amplitud del campo h_x y de la distancia d . Los parámetros fijos son: $\Omega = 0.5$, $\beta = 1$, $\lambda = 0.05$, $h_y = 1$ y $h_z = 1$. (Derecha)

Ampliación del recuadro negro del panel izquierdo. Las dinámicas específicas (a-e) a lo largo de la línea diagonal en el panel derecho se muestran en la Fig. 5.3.

La Figura 5.1 muestra un diagrama de fase representado el MEL en código de colores como función de la distancia d y de la amplitud del campo h_x . Éste muestra una completa región de periodicidad para $d \lesssim 0.7$, dentro del rango mostrado. En esta región, el campo no es lo suficientemente grande como para romper la interacción consistente entre los dipolos. Se puede perturbar el set como un todo, pero los dipolos no pueden separarse en órbitas independientes. Para $d \gtrsim 3$, la dinámica para cada h_x fijo se vuelve consistente, sin importar cuanto se aumente la distancia. Por tanto, se puede considerar la región donde la dinámica de campo domina la interacción dipolar. La región intercala dinámicas caóticas y periódicas a medida que

incrementamos h_x . Entre estas dos regiones, en la transición entre el dominio del campo y el dominio dipolar, i. e. $0.7 \lesssim d \lesssim 3$ se encuentra una rica variedad de regiones caóticas. Por tanto, se hace un zoom de esta región y se muestra en la Fig. 5.1 (derecha). En esta figura, en la región que cumple $h_x \lesssim 2.0(1-d)$ se encuentran patrones de formas bastante características. Estas formas rápidamente desaparecen para campos mayores. El valor del MEL decrece y el tamaño de estos patrones disminuye. Las áreas caóticas no son compactas, pero dentro contienen zonas con comportamiento regular. Un patrón muy similar se encuentra en [57], por tanto se esperaba en el estudio de sistemas magnéticos de partículas.

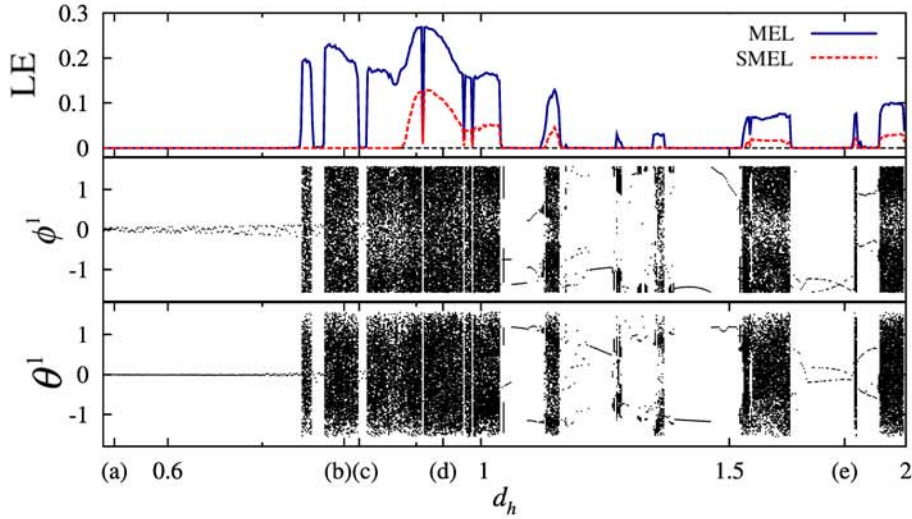


Figura 5.2: MEL y SMEL a lo largo de la línea negra del panel derecho de la Fig. 5.1, con el correspondiente diagrama de bifurcación de ϕ^l y θ^l .

Los dos mayores exponentes de Lyapunov (MEL, SMEL) y los diagramas de bifurcación de (ϕ^l, θ^l) a lo largo de la línea negra del panel derecho de la Figura 5.1 se muestran en la Figura 5.3. El diagrama de bifurcación no muestra un cambio en la densidad o distribución evidente cuando el sistema pasa de caos a hipercaos. Estos regímenes intermitentes presentan su máximo en valores de bifurcación que corresponden a los obtenidos en la Fig. 5.2 (derecha): primero las formas características caóticas antes mencionadas, después el gran régimen hipercaótico, y finalmente una interacción de regímenes caóticos, hipercaóticos y periódicos.

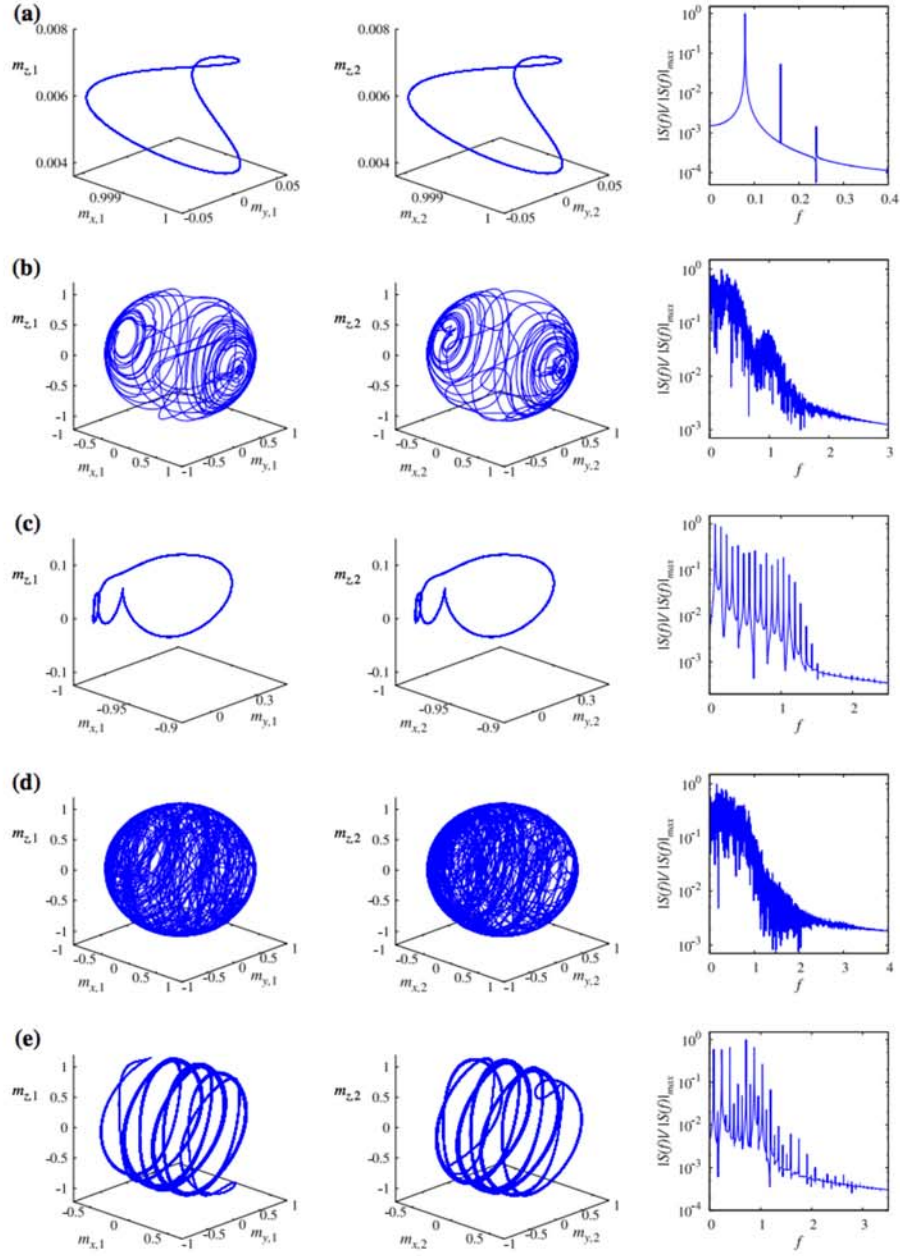


Figura 5.3: Trayectorias del dipolo (columnas 1 y 2) y espectro de Fourier (columna 3) de la componente z de la partícula 1 para los puntos indicados en el panel derecho de la Fig. 5.1. Los dos primeros exponentes de Lyapunov son $\Lambda_1 \approx (-0.572 \times 10^{-5}, 0.203, 1.6 \times 10^{-4}, 0.245, 6.9 \times 10^{-4})$ y $\Lambda_2 \approx (-5.71 \times 10^{-5}, -1.3 \times 10^{-5}, -3.47 \times 10^{-5}, 0.11, 5.7 \times 10^{-5})$, respectivamente.

Los casos particulares especificados en el panel derecho de la Figura 5.1 son estudiados en más detalle en la Figura 5.3. La primera columna muestra la trayectoria del dipolo 1, así que puede ser

comparada con la trayectoria del dipolo 2 de la segunda columna. La tercera columna muestra el correspondiente espectro de Fourier de la componente z de la partícula 1. La fila (a) muestra un estado periódico encontrado para $d = 0.550$ y $h_x = 0.412$. Éste es un ejemplo simple de sincronización periódica de estados de 3 modos, como muestra el espectro de Fourier. El rango cubierto por (m_x^i, m_y^i, m_z^i) es muy limitado, indicando lo que debería esperarse para amplitudes bajas del campo y distancias cortas: la interacción dipolar domina, permitiendo solo oscilaciones de los dipolos muy restringidas. Para $d = 0.800$ y $h_x = 2.034$ (fila (b)), el sistema entra en caos no sincronizado. Aunque las trayectorias no son iguales para ambos dipolos, una rotación alrededor del eje m_x es predominante en esa dinámica. Ambos dipolos cambian entre la vecindad de $m_x^1 = m_x^2 = -1$ y $m_x^1 = m_x^2 = 1$. El ancho del pico del espectro de Fourier es consistente con el exponente de Lyapunov positivo encontrado para esos parámetros en el panel derecho de la Figura 5.1. El sistema vuelve a ser periódico cuando $d = 0.824$ y $h_x = 2.162$ (fila (c)). El incremento en ambos campos y la distancia permite cubrir un amplio rango de (m_x^i, m_y^i, m_z^i) por la trayectoria. Sin embargo, como en las trayectorias de la fila (a), la dinámica es confinada a la vecindad de $m_x^1 = m_x^2 = -1$ o $m_x^1 = m_x^2 = 1$, dependiendo de las condiciones iniciales. Un gran número de modos de oscilación son encontrados en estos estados periódicos sincronizados, con una relativamente corta excursión en dirección al ecuador de las componentes x . La fila (d) ($d = 0.935$ y $h_x = 2.709$) muestra trayectorias hipercaóticas para los dipolos. Aunque parece haber una prevalencia de rotaciones alrededor del eje x (como en el régimen caótico de la fila (b)), esta inestabilidad no permite la aparición de un atractor. Las trayectorias son isotrópicas, y los picos de Fourier son encontrados en un amplio rango de frecuencias. La fila (e) muestra lo que Sparrow [159] describe como una *periodicidad ruidosa*. El espectro de Fourier muestra un número de picos bien definidos para frecuencias bajas, acompañado de algunos picos de baja amplitud y alta frecuencia. Ésto ensancha las posibles trayectorias sin difuminar la estructura general del principal

atractor periódico. El resultado es una órbita periódica en un sistema determinista que parece estar bajo una forma de ruido [159].

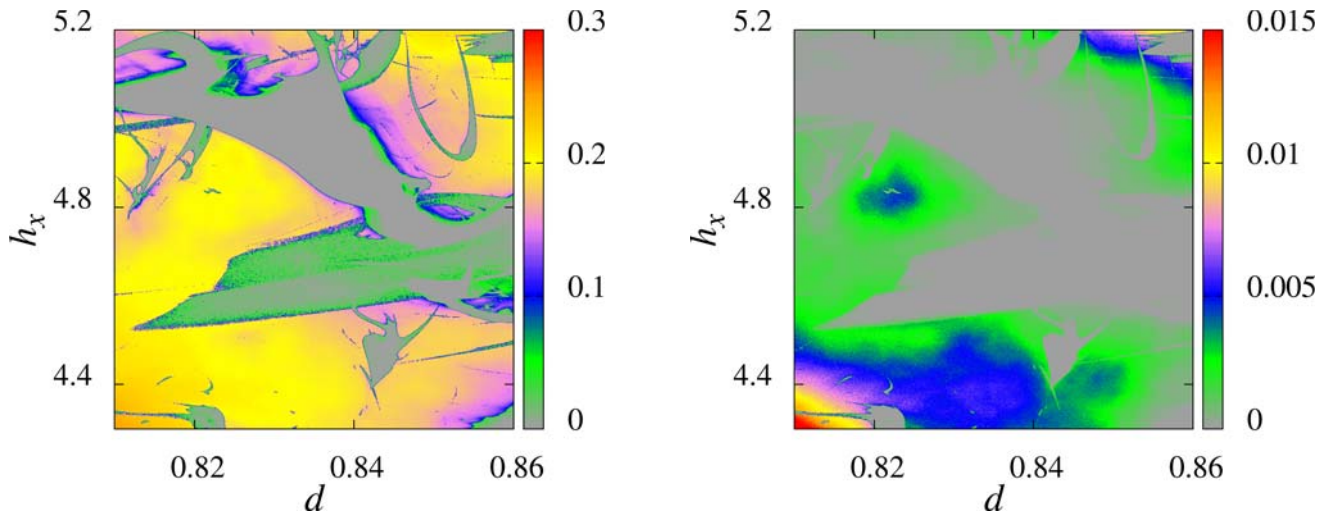


Figura 5.4: Diagrama de fase representando el MEL y el SLE en código de colores como una función de la amplitud de campo h_x y la distancia d . El rango corresponde a la caja negra de la Fig. 5.1 (derecha).

La Figura 5.4 muestra diagramas de fase representando al MEL (panel izquierdo) y al SMEL (panel derecho) en código de colores como una función de la distancia d y de la amplitud del campo h_x para la caja negra del panel derecho de la Figura 5.1. Podemos observar una banda de periodicidad con regímenes caóticos granulados, y que los dominios hipercaóticos se encuentran en áreas reducidas del espacio de parámetros. El hipercaos es, según lo esperado, un subgrupo de las regiones con caos. La mayoría de las regiones con periodicidad caótica granular desaparecen en el caso del hipercaos, lo que implica que los regímenes hipercaóticos dispersos en el medio de la periodicidad son raros, casi inexistentes. El SMEL se encuentra en la media alrededor de un orden de magnitud menos que el MEL, por lo que requiere un refinamiento más sólido en la medida del espectro de Lyapunov.

Finalmente, comentamos que como hemos visto en la Figura 5.3 la posibilidad de estados sincronizados, en la próxima sección estudiamos la sincronización de forma más detallada.

5.4 Estudio de la Sincronización

En este apartado estudiamos diferentes tipos de sincronización midiendo las amplitudes $\{m_z^i\}$ y los ángulos $\{\phi^i\}$ con $i=(1,2)$. La señal común basada en la sincronización propuesta en [145] puede ser extendida a este caso, donde los dipolos que interactúan son suficientes para encontrar comportamientos y grados de sincronización. En particular, en este trabajo se usan dos medidas para determinar la sincronización. La primera es el coeficiente de Pearson. Este ha sido usado previamente en sistemas caóticos [151], que en nuestro caso puede ser escrito como:

$$\rho_z = \frac{\langle (m_z^1 - \langle m_z^1 \rangle)(m_z^2 - \langle m_z^2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (m_z^1 - \langle m_z^1 \rangle)^2 \rangle} \sqrt{\langle (m_z^2 - \langle m_z^2 \rangle)^2 \rangle}}. \quad (5.4)$$

Este coeficiente puede variar en el rango $(-1,1)$. Los valores extremos representan régimen de anti-sincronización completa y régimen de sincronización completa, respectivamente. En el caso de $\rho_z = 0$ el sistema está no sincronizado. Por otra parte, la sincronización de fase puede ser usada para interpretar como se relacionan las partículas [146-147]. La función de similitud necesaria en nuestro caso está dada por:

$$\Delta\Psi = |\Psi^{(1)} - \Psi^{(2)}|, \quad (5.5)$$

donde $\Psi^{(j)} = \langle \dot{\phi}^j \rangle$ representa la tasa media de cambio de ϕ^j . Nótese que cuando $\Delta\Psi = 0$, el sistema tiene un estado de fase sincronizado. También, es equivalente a que $\Psi^{(1)}/\Psi^{(2)} = 1$.

Adicionalmente, combinando estos indicadores con los exponentes de Lyapunov uno cuantificar los regímenes dinámicos de sincronización. Por ejemplo, para un conjunto de parámetros fijo si $\rho_z \approx (-)1$ y $\Lambda_1 > 0$ los dipolos están en un estado caótico antisincronizado, o si $\Delta\Psi = 0$ y $\Lambda_1 > 0$ el sistema están en un estado de fase caótico sincronizado. Asimismo, si $\Delta\Psi = 0$,

$\Lambda_1 > 0$ y $\Lambda_2 > 0$ es un estado hipercaótico sincronizado. Para tomar la media temporal de ρ_z y de $\Delta\Omega$ dejamos evolucionar el sistema hasta que su estado transitorio inicial ha terminado y el sistema se encuentra en un estado persistente. Para ambos indicadores establecemos una tolerancia menor que el 3% para considerar que el sistema está en un estado sincronizado.

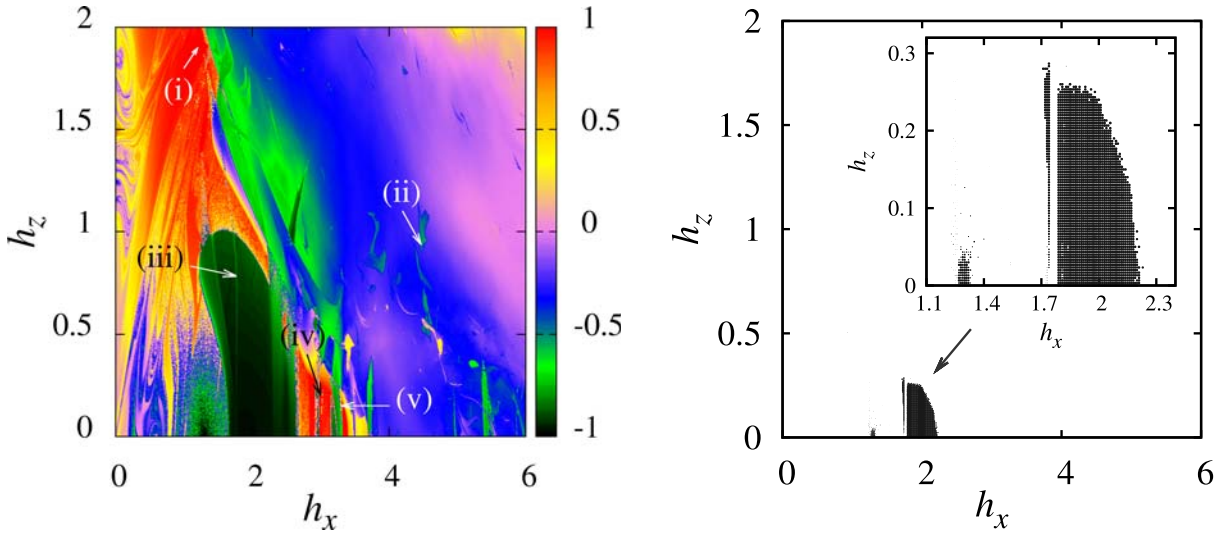


Figura 5.5: (Izquierda) Diagrama de fase que se muestra ρ_z en código de colores como función de las amplitudes del campo h_x y h_z . (Derecha) Región de anti-sincronización caótica en panel (a) con $|1 + \rho_z| < 3\%$. Los parámetros fijos son: $\Omega = 0.5$, $\beta = 1$, $\lambda = 0.05$, $d = 0.8$ y $h_y = 1$.

El panel izquierdo de la Figura 5.5 muestra en código de colores un diagrama de fase del coeficiente de Pearson ρ_z como función de las amplitudes del campo h_x y h_z . La distancia $d = 0.8$ ha sido elegida por estar en la interfase entre el campo y la interacción dipolar. Las regiones periódicas con $h_x \lesssim 1.5$ muestran una diversa colección de estados periódicos sincronizados y no sincronizados intercalados. Los valores más altos de h_z en esta región tienen ρ_z igual o cercano a 1. La antisincronización ocurre en una región más pequeña para $\{0 \lesssim h_z \lesssim 0.2, 1 \lesssim h_x \lesssim 1.5\}$. La región caótica en forma de lengua dentro de $\{0 \lesssim h_z \lesssim 1, 1.5 \lesssim h_x \lesssim 2.5\}$ esta antisincronizada.

Esto significa que la lengua entera desde, por ejemplo, valores mas bajos de h_x implica una transición de regímenes periódicos no sincronizados a otros caóticos antisincronizados.

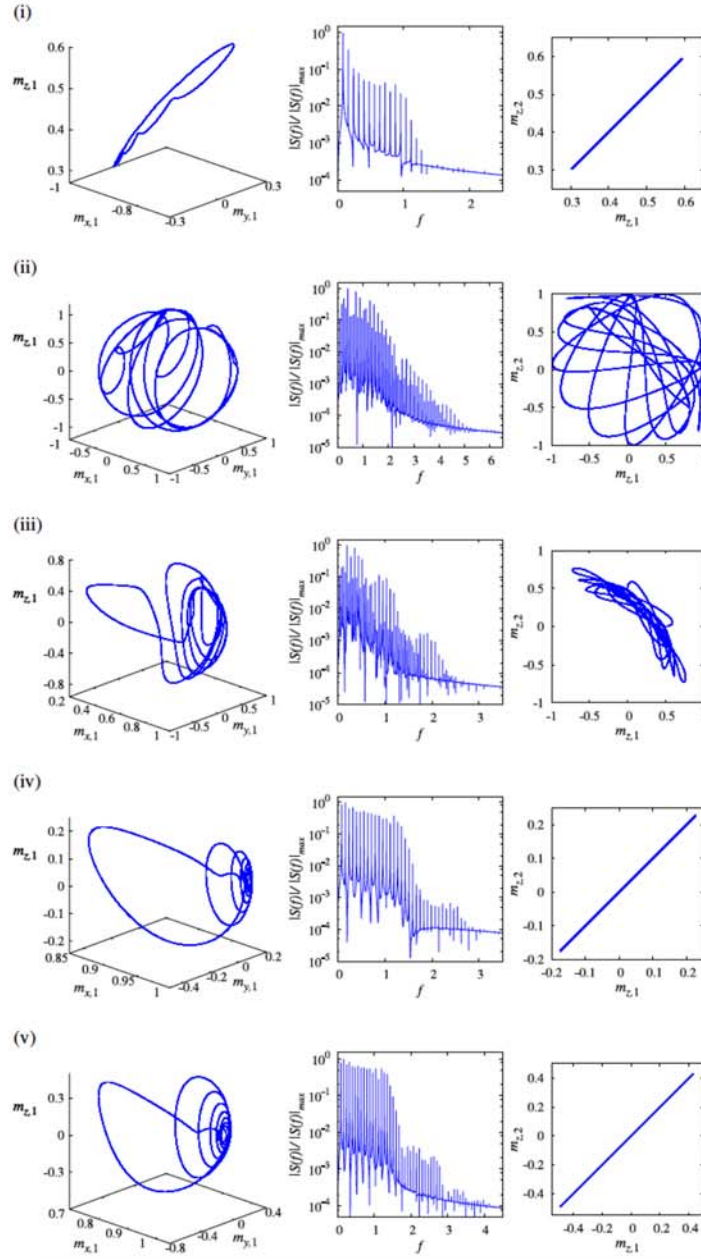


Figura 5.6: Trayectorias del dipolo (columnas 1 y 2) y representación paramétrica de (m_z^1, m_z^2) de los puntos indicados en el panel izquierdo de la Fig. 5.5.

El detalle del caos antisincronizado puede observarse en el panel derecho de la Figura 5.5. Sin embargo, hay valores en la parte de h_z al final de la lengua, y en la parte alta de h_x , al final de ella, donde los dipolos van de periodicidad sincronizada hasta caos antisincronizado. Esta interesante transición a antisincronización, cuando el sistema gana un grado de inestabilidad debido al caos, es hasta el momento no intuitiva para explicar en términos de análisis. Las regiones caóticas restantes con $h_z \gtrsim 0.8(3.5 - h_x)$ son mayoritariamente no sincronizadas en términos del coeficiente de Pearson.

Varios parámetros de estados periódicos fueron indicados en la Figura 5.5 (a). Las trayectorias de la primera partícula y del correspondiente espectro de Fourier de m_z^1 son detallados en la Figura 5.6. Remarcamos que todas las trayectorias presentadas tienen un alto número de picos de Fourier. El más simple es la línea (i), encontrada en la región $h_z \lesssim 0.8(3.5 - h_x)$, donde una dinámica simple es más común (excepto para la lengua caótica). De los 5 casos presentados, la fila (ii) tiene el mayor número de picos. Las figuras muestran órbitas periódicas intrincadas cuando los dos dipolos son antisimétricos. Los otros casos son órbitas periódicas simétricas cuando uno de los polos m_x^i prevalece sobre el otro, dependiendo de las condiciones iniciales. Además, se puede observar que hay sincronización periódica en los casos (i), (iv) y (v).

Los tres primeros paneles de la Figura 5.7 muestran en un diagrama de fase en código de color el coeficiente de Pearson como una función de la amplitud del campo h_x y de la distancia d . El coeficiente de Pearson exhibe una topología compleja en el espacio de parámetros. Se pueden observar múltiples transiciones entre regímenes sincronizados y no sincronizados. De hecho, se revelan características similares encontradas en los diagramas MEL (Figura 5.1). Los paneles (b) y (c) son ampliaciones sucesivas del panel (a) para valores intermedios de d . Las formas características dentro de $h_x \lesssim 2.0(1 - d)$ (como se ve en el panel (b)) son predominantemente

antisincronizadas, aunque también se encuentran regiones dispersas de caos sincronizado en el panel (d). El zoom que aparece en el panel (c) de la Figura 5.7 muestra un espacio paramétrico granulado que tiende a la anti-sincronización, rodeado de regímenes no sincronizados.

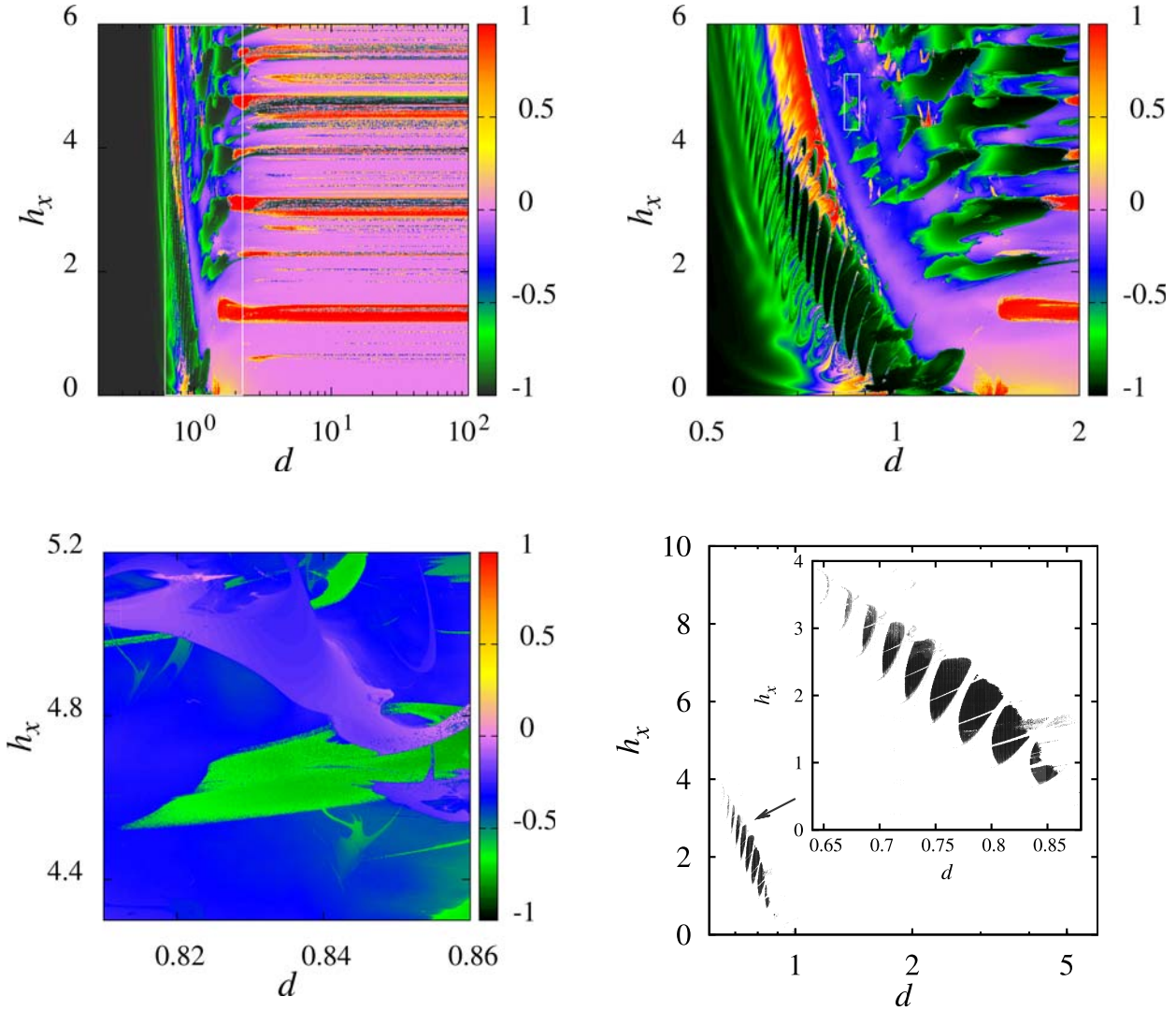


Figura 5.7: (a) Diagrama de fase que se muestra ρ_z en código de colores como función de las amplitudes del campo h_x y de la distancia d . (b) Ampliación de la caja (a). (c) Ampliación de la caja blanca en (b) (d) Zoom de la región (b) con anti-sincronización caótica con $|1 + \rho_z| < 3\%$. Los parámetros fijos son los mismos que en la Fig. 5.1.

Finalmente, la Figura 5.8 muestra la sincronización de fase como función de la amplitud del campo h_x y de la distancia d . Aquí nos centramos en valores intermedios de la distancia. La

sincronización de fase está presente para la mayoría del rango estudiado, con excepción de algunas islas cuando $d \gtrsim 1$. No hay apenas sincronización de fase para $1 \lesssim d \lesssim 1.5$ y $0 \lesssim h_x \lesssim 0.1$.

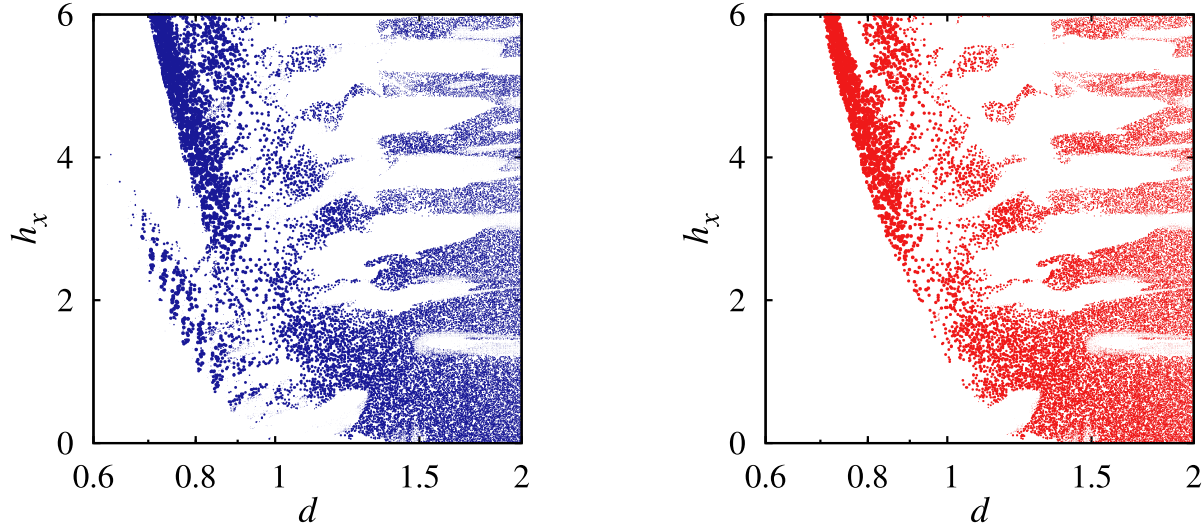


Figura 5.8: Regiones sincronizadas caóticas **(a)** e hipercaóticas **(b)** como función de las amplitudes del campo h_x y de la distancia d con $|1 - \Omega_1 / \Omega_2| < 3\%$. Los parámetros fijos son los mismos que en la Fig. 5.1. Las zonas blancas indican la no sincronización de fase.

Además, uno puede observar que hay estados hipercaóticos sincronizados como se muestra en el panel derecho de la Figura 5.8. Estas regiones son subgrupos de las regiones caóticas.

5.4 Comentarios Finales

En este capítulo hemos estudiado la dinámica de magnetización de dos partículas anisotrópicas que interactúan a través de la interacción dipolar en presencia de un campo magnético externo constante longitudinal y uno periódico transversal usando la ecuación de Landau-Lifshitz disipativa. El sistema presenta una variedad de regímenes regulares e hipercaóticos, tales que las regiones regulares consisten en soluciones periódicas o cuasiperiódicas. Nos hemos centrado también en el fenómeno de sincronización. Las transiciones de periodicidad del caos, en términos de sincronización, son también diversas. La

sincronización periódica se encuentra en la frontera de los estados caóticos antisincronizados, a medida que se incrementa la dirección en h_x y h_z . Se observó también sincronización de fase caótica e hipercaótica.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

Esta tesis doctoral se ha centrado en magnetismo, el cual en general trata sobre estudio del espín, de sus efectos colectivos, como también de partículas cargadas en movimiento. En el **primer capítulo** se expuso una muy breve introducción de la evolución histórica del entendimiento y del uso que se le ha dado al magnetismo. Luego se describieron los tipos más comunes de comportamientos magnéticos, así como que materiales los manifiestan. En particular, se consideró el caso del paramagnetismo como el caso del ferromagnetismo clásico.

En el **capítulo dos** se ha descrito como modelar la dinámica de partículas magnéticas en el contexto clásico cuando ellas pueden ser consideradas como monodominios magnéticos. Se han mostrado los dos modelos más usados para describir en contexto clásico la dinámica de la magnetización, conocidos por el modelo de Landau-Lifshitz [\[27\]](#) y de Landau-Lifshitz-Gilbert [\[28\]](#). Se han expuesto propiedades generales de las ecuaciones de movimiento, y en que casos particulares hay cantidades conservadas. Además, se mostró en que casos ambas ecuaciones son equivalentes. Luego se describieron los distintos tipos de interacciones. Finalmente, se estudió el caso de una partícula magnética anisotrópica en presencia de un campo externo homogéneo en el límite conservativo.

En el **capítulo tres** comienza el trabajo original de la tesis. En particular, se ha analizado la dinámica de magnetización de una partícula anisotrópica en presencia simultánea de un campo magnético constante y uno periódico dependiente del tiempo en el marco de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert. En trabajos anteriores, se investigó el caso de anisotropía uniaxial [\[55,56\]](#). Sin embargo, en esta tesis hemos considerado una situación más general con anisotropías biaxiales. Determinamos las regiones en el espacio de parámetros de control donde existen fases caóticas y regulares. Encontramos que la anisotropía juega un rol importante en la creación de un

número adicional de nuevos comportamientos dinámicos para una partícula. Para partículas biaxiales, cuando los coeficientes de anisotropía tienen valores similares, el diagrama bidimensional del MEL exhibe una forma simétrica circular como función de las amplitudes del campo de forzamiento. En contraste, cuando los coeficientes tienen signos diferentes esta simetría circular se rompe, pero el diagrama del MEL todavía muestra una simetría de espejo de inversión suave. Encontramos partículas anisotrópicas forzadas que presentan transiciones múltiples entre estados regulares y caóticos.

Un tipo interesante de islas localizadas de patrones regulares fue descubierto dentro de las regiones caóticas. Estas estructuras muestran la misma estructura de la familia de peculiar *forma de camarón* para otros muchos sistemas (no magnéticos) [45,99-104]. Según nuestro conocimiento ésta es la primera vez que estas estructuras se reportan en un contexto magnético. Estas estructuras son conocidas por ser el link entre la clase universal de dinámica observada en caos homoclínico de Shilnikov [105,160,161]. La organización global de estructuras complejas es todavía pobremente entendida, y las partículas magnéticas ofrecen una sistema alternativo para futuras investigaciones. Además, sería interesante estudiar si esta semejanza ciertamente existe y cual es la extensión de estas similitudes, si las hay. Igualmente, podría ser interesante computar diagramas de *isospike* [162-165], es decir diagramas de fase representando el número de cúspides contenido en un periodo cada oscilación periódica.

En el **capítulo cuatro** se ha estudiado un dímero magnético en presencia de un campo externo aplicado, teniendo en cuenta la energía anisotropía y la interacción de intercambio entre partículas. Se ha considerado este modelo prototipo ya que puede ser una herramienta interesante para describir moléculas magnéticas en la aproximación semiclásica [126, 127], o dos partículas magnéticas interactuando en la aproximación macroespín cuando las energías de superficie pueden ser despreciadas [135]. La evolución temporal del sistema se ha descrito en el enfoque de la ecuación de Landau-Lifshitz. Se ha analizado tanto, los regímenes conservativos como los disipativos. En el caso conservativo, el sistema se ha caracterizado

principalmente a través de los exponentes de Lyapunov como una función de los parámetros y simulaciones numéricas intensivos, la computación 10^6 MEL en cada diagrama de dos dimensiones, se han realizado con zoom iterativo en las regiones pertinentes. En particular, se encontró que para acoplamientos positivos, el sistema es caótico en una amplia gama de valores de campo magnético si las constantes de anisotropía son iguales. La situación no es la misma cuando estas constantes tienen la misma magnitud pero diferente signo, donde aparecen regularmente regímenes caóticos para pequeños campos. Cuando la constante de acoplamiento es negativa, el escenario es completamente diferente. Para anisotropías iguales el sistema exhibe comportamientos regulares para casi todo el rango de campos magnéticos, excepto en cuatro regiones caóticas en forma de pluma ubicadas de forma simétrica con respecto al campo. Mientras tanto, para los diferentes signos de las constantes de anisotropía se encuentran múltiples transiciones de estados regulares a caóticos. Estos diagramas de Lyapunov revelan patrones complejos. En el caso de dinámica disipativa se ha calculado numéricamente la solución final estacionaria después de un tiempo transitorio. Para anisotropía fija, hemos observado que la magnetización de ambos está orientada a lo largo del campo cuando la constante de cambio es positiva. Para acoplamientos negativos otras orientaciones son finalmente alcanzadas cuando $|h_x| < 1$. En este rango de campos, para intercambio negativo cuando se varían las anisotropías, hay una región donde el momento magnético de las partículas están en oposición de fase. Finalmente, observamos que debido a la interacción entre las partículas, se pueden observar diferentes tipos de sincronizaciones. La investigación adicional en esta dirección es un tema que nos gustaría profundizar en futuros trabajos. En particular, como la constante de intercambio induce sincronización.

En el **capítulo cinco** se ha caracterizado la dinámica de magnetización de dos partículas anisotrópicas interactuantes en presencia de un campo magnético externo. Este campo tiene una componente transversal periódica en el tiempo y una longitudinal constante. La interacción entre partículas es a través de la interacción dipolar. Siendo ella de naturaleza diferente a la analizada en

el capítulo 4. De hecho, este tipo de acoplamiento magnético juega un rol fundamental en sistemas nanoestructurados como hielos artificiales de espín [143]. Luego su entendimiento puede ayudar a futuras aplicaciones tecnológicas. La dinámica ha sido estudiada con la ecuación disipativa de Landau-Lifshitz. Debido a la competencia entre inyección y disipación de energía pueden aparecer estados dinámicos complejos. Hemos determinado las regiones de parámetros que llevan a regímenes caóticos o regulares usando el método de los exponentes de Lyapunov. Se han hecho cálculos numéricos extensivos variando dos parámetros simultáneamente. El segundo mayor exponente de Lyapunov fue calculado para identificar hipercaos. Estos nos lleva a diagramas de fase del segundo mayor exponente, y por tanto a regímenes hipercaóticos, como función de estos parámetros. En particular, hemos variado tanto la distancia entre las partículas como las amplitudes de los campos. El efecto de la frecuencia de forzamiento ha sido analizada en referencia [59]. Normalmente, de manera intrincada se encuentran regiones caóticas y regulares entremezcladas separadas por límites difusos. Estas regiones regulares consisten en soluciones periódicas o cuasiperiódicas.

Finalmente, nos hemos centrado en el fenómeno de sincronización [144]. Los diferentes tipos de sincronización han sido medidos usando dos indicadores principales: el coeficiente de Pearson asociado a la componente z del momento magnético y la diferencia de fases. Las medidas de los indicadores, junto con el análisis de los exponentes de Lyapunov mostraron que el sistema exhibe sincronización periódica, sincronización caótica, sincronización hipercaótica, antisincronización caótica. Antisincronización hipercaótica no fue sido encontrada. En relación a los estados caóticos el hipercaos es, por supuesto un subgrupo del caos en el espacio de parámetros. La sincronización hipercaótica no se encuentra nunca en la vecindad del caos antisincronizado. Las transiciones de periodicidad del caos, en términos de sincronización, son también diversas. La sincronización periódica se encuentra en la frontera de los estados caóticos anti-sincronizados, a medida que se incrementa la dirección en h_x y h_z . La caracterización de la sincronización de retardo [147] no fue analizada y esperamos poder hacerlo en el futuro.

Bibliografía

Capítulo 1

1. J. M. D. Coey, *Magnetism and Magnetic Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
2. W. Gilbert, *De Magnete*, Dover Publications, New York, 1991.
3. J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vols. 1 & 2, Dover Publications, New York, 1954.
4. S. Tomonaga (Ed.), T. Oka (Ed.), *The Story of Spin*, University Of Chicago Press, Chicago, 1998.
5. P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **117** (1928) 610.
6. M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Westview Press, Colorado, 1995
7. D. C. Mattis, *The Theory of Magnetism*, vols. 1 & 2, Springer-Verlag, New York 1987.
8. J. Tejada-Palacios, Revista Española de Física, **17** (2003) 1903.
9. B. D. Cullity, C. D. Graham, *Introduction to Magnetic Materials*, Wiley-IEEE Press, New Jersey, 2009
10. E. D. Daniel (Ed.), C. Denis Mee (Ed.), M. H. Clark (Ed.), *Magnetic Recording: The First 100 Years*, Wiley-IEEE Press, New Jersey, 1998.
11. F. Nasirpour (Ed.), A. Nogaret (Ed.), *Nanomagnetism and Spintronics: Fabrication, Materials, Characterization and Applications*, World Scientific, Singapore, 2010.
12. T. Shinjo (Ed.), *Nanomagnetism and Spintronics*, Elsevier, Dordrecht, 2009.

13. S. Odenbach, *Ferrofluids: Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*, Springer, Berlin, 2002
14. S. Odenbach, *Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids*, Springer, Berlin, 2009.
15. D. Gatteschi, R. Sessoli, J. Villain, *Molecular Nanomagnets*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
16. R. Bagai, G. Christou, Chem. Soc. Rev. **38** (2009) 1011.
17. G. L. Verschuur, *Hidden Attraction: The History and Mystery of Magnetism*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
18. S. J. Blundell, *Magnetism: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2012.
19. A. Passos Guimarães, *From Lodestone to Supermagnets: Understanding Magnetic Phenomena*, Wiley-VCH, New Jersey , 2005.
20. S. Chikazumi, *Physics of Ferromagnetism*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
21. P. Langevin, Ann. Chemie et Physique **5** (1905) 70.
22. M. P. Marder, *Condensed Matter Physics*, Wiley, New York, 2000.
23. P. Weiss, Compt. Rend. **143** (1906) 1136.
24. L. Néel, Ann. de Physique **18** (1932) 5.

Capítulo 2

25. C. Ross, Annu. Rev. Mater. Res. **31** (2001) 203.
26. H. Zabel (Ed.), M. Farle (Ed.), *Magnetic Nanostructures: Spin Dynamics and Spin Transport*, Springer, Berlin, 2013.
27. L. Landau, E. M. Lifshitz, Phys. Z. Sowjetunion **8** (1935) 153.

28. T. L. Gilbert, IEEE Trans. Mag. **40** (2004) 3443.
29. P.E. Wigen (Ed.), *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials*, World Scientific, Singapore, 1994.
30. G. Boling, D. Shijin, *Landau-Lifshitz Equations*, World Scientific, Singapore, 2008.
31. I. D. Mayergoyz, G. Bertotti, C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems*, Elsevier, Dordrecht, 2009.
32. M. Lakshmanan, Phil. Trans. R. Soc. A **369** (2011) 1280.
33. J. L. Garcia-Palacios, F. Lazaro, Phys. Rev. B **58** (1998) 14937.
34. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, C. Serpico, Phys. B **343** (2004) 325.
35. C. Serpico, I. D. Mayergoyz, G. Bertotti, J. Appl. Phys. **93** (2003) 6909.
36. G. Bertotti, C. Serpico, I. D. Mayergoyz, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 724.
37. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, C. Serpico, Phys. B **306** (2001) 47.
38. C. Serpico, M. d'Aquino, G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, J. Magn. Magn. Mater. **272–276** (2004) 734.
39. E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20** (1963) 130.
40. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
41. J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
42. H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
43. W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*, Springer, Berlin, 2006.
44. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Physica D **16** (1985) 285.
45. J. A. C. Gallas, Int. J. Bifur. Chaos **20** (2010) 197.
46. E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, Washington, 1993.
47. J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Penguin Books, New York, 2008.

48. G. Gibson, C. Jeffries, Phys. Rev. A **29** (1984) 811.
49. F. M. de Aguiar, A. Azevedo, S. M. Rezende, Phys. Rev. B **39** (1989) 9448.
50. J. Becker, F. Rodelsperger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just, A. Cenys, Phys. Rev. E **59** (1999) 1622.
51. J. Cai, Y. Kato, A. Ogawa, Y. Harada, M. Chiba, T. Hirata, J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 3087.
52. L. F. Alvarez, O. Pla, O. Chubykalo, Phys. Rev. B **61** (2000) 11613.
53. D. V. Vagin, P. Polyakov, J. Appl. Phys. **105** (2009) 033914.
54. R. K. Smith, M. Grabowski, R. E. Camley, J. Magn. Magn. Mater. **322** (2010) 2127.
55. D. Laroze, J. Bragard, O. J. Suarez, H. Pleiner, IEEE Trans. Mag. **47** (2011) 3032.
56. J. Bragard, H. Pleiner, O. J. Suarez, P. Vargas, J. A. C. Gallas, D. Laroze, Phys. Rev. E **84** (2011) 037202.
57. D. Laroze, D. Becerra-Alonso, J. A. C. Gallas, H. Pleiner, IEEE Trans. Mag. **48** (2012) 3567.
58. **L. M. Pérez**, J. Bragard, H. L. Mancini, J. A. C. Gallas, A. M. Cabanas, O. J. Suarez, D. Laroze, Networks and Heterogeneous Media **10** (2015) 209.
59. **L. M. Pérez**, O. J. Suarez, D. Laroze, H. L. Mancini, Cent. Eur. J. Phys. **11** (2013) 1629.
60. D. Urzagasti, D. Becerra-Alonso, **L. M. Pérez**, H. L. Mancini, D. Laroze. J. Low Temp. Phys. **181** (2015) 211.
61. D. Urzagasti, D. Becerra-Alonso, **L. M. Pérez**, H. L. Mancini, D. Laroze. Capítulo de libro en *Nonlinear Dynamics: Materials, Theory and Experiments* (Springer Proceedings in Physics 173), Springer, Switzerland, 2016.
62. M. Filipovic, C. Holmqvist, F. Haupt, W. Belzig, Phys. Rev. B **87** (2013) 045426.
63. Y. Nambu, Phys. Rev. D **7** (1973) 2405.
64. W. B. Nurdin, K. D. Schotte, Phys. Rev. E **61** (2000) 3579.
65. W. B. Nurdin, K. D. Schotte, Phys. A **308** (2002) 209.
66. P. Diaz, D. Laroze, Int. J. Bifur. Chaos **19** (2009) 3485.

67. N. Mukunda, E. Sudarshan, Phys. Rev. D **13** (1976) 2846.
68. T. Curtright, C. Zachos, Phys. Rev. D **68** (2003) 085001.
69. L. Takhtajan, Commun. Math. Phys. **160** (1994) 295.
70. T L. Gilbert, J.K. Kelly, Proceedings of the Pittsburg Conference on MMM, Pittsburgh, PA, 1955, p. 253. Este es solo un resumen de un congreso, nunca se presento la versión extendida. El resumen apareció también bajo la referencia “T. L. Gilbert, Phys. Rev. **100** (1955) 1243”; sin embargo esta no aparece en la base de datos de *Physical Review*. El trabajo completo sobre la disipación de Gilbert se expone en la referencia [\[28\]](#).
71. D. A. Garanin, Phys. A **172** (1991) 470.
72. F. M. Saradzhev, F. C. Khanna, S. P. Kim, M. de Montigny, Phys. Rev. B **75** (2007) 024406.
73. M. D. Stiles, W. M. Saslow, M. J. Donahue, A. Zangwill, Phys. Rev. B **75** (2007) 214423.
74. M. C. Ciornei, J. M. Rubí, J. E. Wegrowe Phys. Rev. B **83** (2011) 020410(R).
75. M. Fahnle, D. Steiauf, C. Illg, Phys. Rev. B **84** (2011) 172403.
76. A. Brataas, Y. Tserkovnyak, G. E. W. Bauer, Phys. Rev. B **84** (2011) 054416.
77. W. M. Saslow, J. App. Phys. **105** (2009) 07D315.
78. W. M. Saslow, K. Rivkin, J. Magn. Magn. Mater. **320** (2008) 2622.
79. R. Urban, G. Woltersdorf, B. Heinrich, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 217204.
80. H. T. Nembach, J. M. Shaw, C. T Boone, T. J. Silva, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 117201
81. M.A. Ruderman, C. Kittel, Phys. Rev. **96** (1954) 99.
82. T. Kasuya, Prog. Theor. Phys. **16** (1956) 45.
83. K. Yosida, Phys. Rev. **106** (1957) 893.
84. I. Dzyaloshinsky, Sov. Phys. JEPT **5** (1957) 1259.
85. T. Moriya, Phys. Rev. **120** (1960) 91.
86. J. A. A. J. Perenboom, J. S. Brooks, S. Hill, T. Hathaway, N. S. Dalal, Phys. Rev. B **58** (1998) 330.
87. E. Beaupaire, J. C. Merle, A. Daunois, J. Y. Bigot, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4250.
88. B. Koopmans, M. van Kampen, J.T. Kohlhepp, W.J.M. de Jonge, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 844.

89. J. Hohlfeld, E. Matthias, R. Knorren, K.H. Bennemann, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 4861.
90. E. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, Boulder Colorado, 2001.
91. O. E. Rössler, Phys. Lett. A **71** (1979) 155.
92. T. Matsumoto, L. O. Chua, K. Kobayashi, IEEE Trans. Circuits Systems, **CAS-33** (1986) 1143.
93. G. Baier, S. Sahle, Phys. Rev. E **51** (1995) R2712.
94. G. Vidal, H. Mancini, Int. J. Bifur. Chaos **19** (2009) 719.
95. G. Vidal, H. Mancini, Int. J. Bifur. Chaos **20** (2010) 885.
96. G. Vidal, *"Sincronización y control de sistemas dinámicos bajo régimen de caos espacio-temporal"*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 2010.
97. H. Gould, J. Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley, New York, 1996.
98. W. L. Ditto, M.L. Spano, H. T. Savage, S. N. Rauseo, J. Heagy, E. Otth, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 533.

Capítulo 3

99. J. A. C. Gallas, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2714.
100. C. Bonatto, J. Garreau, J. A. C. Gallas, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 143905.
101. D. F. M. Oliveira, M. Robnik, E. D. Leonel, Chaos **21** (2011) 043122.
102. A. Sack, J. G. Freire, E. Lindberg, T. Pöschel, J. A. C. Gallas, Nature Sci. Rep. **3** (2013) 03350.
103. W. Façanha, B. Oldeman, L. Glass, Phys. Lett. A **377** (2013) 1264.
104. A. Hoff, D. T. da Silva, C. Manchein, H. A. Albuquerque, Phys. Lett. A **378** (2014) 171.
105. F. T. Arecchi, W. Gadomsky, A. Lapucci, H. Mancini, R. Meucci, J. Roversi, J. Opt. Soc. Am. B **5** (1988) 1153.

106. Y. Khivintsev, B. Kuanr, T.J. Fal, M. Haftel, R.E. Camley, Z. Celinski, D. L. Mills, Phys. Rev. B **81** (2010) 054436.
107. Y. Khivintsev, J. Marsh, V. Zagorodnii, I. Harward, J. Lovejoy, P. Krivosik, R. E. Camley, Z. Celinski, Appl. Phys Lett. **98** (2011) 042505.
108. C. Cheng, W.E. Bailey, Appl. Phys. Lett. **103** (2013) 242402.
109. S. Tandon, M. Beleggia, Y. Zhu, M. De Graef, J. Magn.Magn. Mater **271** (2004) 9.
110. S. Tandon, M. Beleggia, Y. Zhu, M. De Graef, J. Magn.Magn. Mater. **271** (2004) 27.
111. M. Beleggia, S. Tandon, Y. Zhu, M. De Graef, J. Magn.Magn. Mater. **278** (2004) 270.
112. M. Beleggia, M. De Graef, J. Magn.Magn. Mater. **285** (2005) L1.
113. J. Ye, W. He, Q. Wu, H-L. Liu, X-Q. Zhang, Z-Y. Chen, Z-H. Cheng, Sci. Rep. **3** (2013) 2148.
114. C. Bonatto and J. A. C. Gallas, Phil. Trans. R. Soc. A **366** (2008) 505.

Capítulo 4

115. A. Ardavan, O. Rival, J. J. L. Morton, S. J. Blundell, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 057201.
116. N. Leuenberger, D. Loss, Nature **410** (2001) 789.
117. M. Mannini, F. Pineider, P. Saintavit, C. Danieli, E. Otero, C. Sciancalepore, A. M. Talarico, M. A. Arrio, A. Cornia, D. Gatteschi, R. Sessoli, Nature Mater. **8** (2009) 194.
118. L. Bogani, W. Wernsdorfer, Nature Mater. **7** (2008) 179.
119. M. Manoli, R. D. L. Johnstone, S. Parsons, M. Murrie, M. Aronte, M. Evangelisti, E. K. Brechin, Angew. Chem. Int. Ed. **46** (2007) 4456.
120. G. Karotsis, M. Evangelisti, S. J. Dalgarno, E. K. Brechin. Angew. Chem. Int. Ed. **48** (2009) 9928.
121. W. Linert (Ed.), M. Verdaguer (Ed.) *Molecular Magnets* (Springer, Berlin, 2003).
122. D. Gatteschi, L. Pardi, A. L. Barra, A. Müller, J. Doring, Nature **354** (1991) 463.
123. R. Sessoli, D. Gatteschi, A. Caneschi, M. A. Novak, Nature **365** (1993) 141.
124. D. Gatteschi, A. Caneschi, L. Pardi, R. Sessoli, Science **265** (1994) 1054.

125. D. Gatteschi, Adv. Mater. **6** (1994) 635.
126. M. Axenovich, M. Luban, Phys. Rev. B **63** (2001) 100407.
127. A. Bencini, D. Gatteschi, *Electron Paramagnetic Resonance of Exchange Coupled Systems*, Springer, Berlin, 1990.
128. D. Mentrup, J. Schnack, M. Luban, Physica A **272** (1999) 153.
129. D. V. Efremov, R. A. Klemm, Phys. Rev. B **66** (2002) 174427.
130. M. Ameduri, R. A. Klemm, Phys. Rev. B **66** (2002) 224404.
131. R. A. Klemm and M. Luban, Phys. Rev. B **64** (2001) 104424.
132. D. Laroze, P. Vargas, Phys. B **372** (2006) 332.
133. D. Laroze, P. Vargas, C. Cortes, G. Gutierrez, J. Magn. Magn. Mater. **320** (2008) 1440.
134. A. F. Franco, J. M. Martinez, J. L. Dujardin, H. Kachkachi, Phys. Rev. B **84** (2011) 134423.
135. X. Batlle, A. Labarta, J. Phys. D **35** (2002) R15.
136. P. Landeros, J. Escrig, D. Altbir, D. Laroze, J. d'Albuquerque e Castro, P. Vargas, Phys. Rev. B **65** (2005) 094435.
137. D. V. Efremov, R. A. Klemm Phys. Rev. B **74** (2006) 064408.
138. M. G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, Phys. D **239** (2010) 72.

Capítulo 5

139. G. Möller, R. Moessner, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 237202.
140. R.F. Wang, C. Nisoli, R.S. Freitas, J. Li, W. McConville, B.J. Cooley, M.S. Lund, N. Samarth, C. Leighton, V.H. Crespi, P. Schiffer, Nature (Lond.) **439** (2006) 303.
141. R. G. Melko, B. C. den Hertog, M. J.P. Gingras, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 067203.
142. J. P. C. Ruff, R. G. Melko, M. J. P. Gingras, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 097202.
143. C. Nisoli, R. Moessner, P. Schiffer, Rev. Mod. Phys. **85** (2013) 1473.

144. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
145. L. M. Pecora, T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 821.
146. A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Europhysics Letters **34** (1996) 165.
147. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 4193.
148. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares, C. Zhou, Phys. Rep. **336** (2002) 1.
149. S. Boccaletti, *The synchronized dynamics of complex systems*, Elsevier, Dordrech, 2009.
150. J. Bragard, S. Boccaletti, H. Mancini, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 064103.
151. J. Bragard, S. Boccaletti, C. Mendoza, H. G. E. Hentschel, H. Mancini, Phys. Rev. E **70** (2004) 036219.
152. J. Bragard, G. Vidal, H. Mancini, C. Mendoza, S. Boccaletti, Chaos **17** (2007) 043107.
153. Y-C. Lai, Phys. Rev. E **55** (1997) R4861.
154. L. Yaowen, G. Guangming, Z. Hong, W. Yinghai, G. Liang, Phys. Rev. E **62** (2000) 7898.
155. A. A. Budini, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 445001.
156. C. Li, Y. Tong, H. Li, and K. Su, Phys. Scr. **86** (2012) 055003.
157. H-M. Li, and C-L. Li, Phys. Scr. **86** (2012) 045008.
158. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
159. C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, New York, 1982.

Capitulo 6

160. R. Barrio, A. Shilnikov, L. P. Shilnikov, Int. J. Bifur. Chaos **22** (2012) 1230016.
161. J. G. Freire, C. Cabeza, A. Marti, T. Pöschel, J. A. C. Gallas, Nature Sci. Rep. **3** (2013) 01958.

162. J. G. Freire, J. A. C. Gallas, Phys. Chem. Chem. Phys. **13** (2011) 12191.
163. J. G. Freire, J. A. C. Gallas, Phys. Lett. A **375** (2011) 1097.
164. S. L. T. Souza, A. A. Lima, I. R. Caldas, R. O. Medrano-T, Z. O. Guimarães-Filho, Phys. Lett. A **376** (2012) 1290.
165. A. Hoff, D. T. da Silva, C. Manchein, H. A. Albuquerque, Phys. Lett. A **378** (2014) 171.

Summary

The aim of the present thesis is to study the dynamics of magnetic systems out of equilibrium. That is, systems where there is a competition between the injection and the dissipation of energy. In particular, the thesis focuses on classic magnetic systems where each magnetic element can be described by a mono-domain, such that the domain does not have spatial inhomogeneities. We study the case of one element (or particle) as well as the case of two interacting particles. The effects of the shape and composition are considered through the magnetic anisotropy energy. We will use homogeneous external fields and time dependent ones.

The first two chapters of the thesis are focused on addressing the basic concepts of magnetism as the theoretical framework. Firstly, a brief history of magnetism is given and the types of magnetic materials are presented. Subsequently the equations that govern the dynamics of classical magnetic moments and their fundamental properties are introduced. The scenarios where the system has constants of motion are shown. In addition, a special case of one magnetic particle is studied when a homogeneous external magnetic field is applied.

The third chapter deals with the dynamics of a particle with multiple axes of anisotropy in the presence of a time-dependent external field. Regular and chaotic phases are characterized using the Largest Lyapunov exponent within two-dimensional diagrams. Refining the resolution of the diagrams we found regular islands inside of chaotic regions with form of shrimps.

In the fourth and fifth chapters the dynamics of two coupled particles with uniaxial anisotropy is studied. First, the case of exchange interaction with homogeneous external magnetic field is analyzed. The latter case focuses on dipolar interaction between the particles, such that they are in the presence of a time-dependent field. In both cases, two-dimensional phase diagrams of Lyapunov exponents are using to discriminate the regular phases respect to the chaotic (or

hyperchaotic) ones. Furthermore, different types of synchronization between the particles are measured.

Finally, in the sixth chapter the conclusions and prospects are presented.